

du 3 au 6 décembre 2024

Rappel : Le programme de colle en semaine 9 est constitué du programme de la semaine 8 et d'icelui.

CHAPITRE 9 : RÉVISIONS D'ANALYSE.

I: Fonctions continues par morceaux

- 1) Subdivisions d'un segment.
- 2) **Définitions** : fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux.
- 3) Fonctions continues par morceaux :
- 4) ► **Proposition** : une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

II: Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$

- 1) Dérivée d'une fonction en un point, sur un intervalle.
 - a) Définitions.
 - b) **Proposition** : f dérivable $\implies f$ continue.
 - c) **Proposition** : la composée de deux fonctions dérivables l'est et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.
- 2) Dérivées d'ordre supérieur :
 - a) **Définition** : fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Propriétés.
 - b) **Proposition** : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{D}^3(I, \mathbb{R}) \dots$ et ces inclusions sont strictes.
 - c) **Formule de Leibniz**¹.
 - d) **Proposition** : la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ l'est.
- 3) **Théorème de la limite de la dérivée** :

- | |
|--|
| <p>► Théorème : soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell \in F$ alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.</p> |
|--|
- b) **Corollaire** : si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
 - c) **Généralisation** : si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b]$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a^+} f^{(j)}(x)$ existe pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, alors f est $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$.

III: Fonctions convexes

- 1) **Définition** : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

1. Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646-1716 : philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand. En bref, un polymathe.

- 2) **Définition** : on dit que f est concave si $-f$ est convexe.
- 3) **Interprétation géométrique** : Entre x et y , f est sous la corde qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$.
- 4) **Proposition** : f est convexe si et seulement si l'épigraphe $\{(x, y), x \in I, y \geq f(x)\}$ est une partie convexe du plan.
- 5) **Proposition** : f est convexe si pour tout $x \in I$, la fonction φ_x définie sur $I \setminus \{x\}$ par $\varphi_x(y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est croissante.
- 6) **Proposition** : si f est dérivable sur I , f est convexe si et seulement si f' est croissante.
- 7) **Proposition** : si f est dérivable sur I , f est convexe si et seulement si en tout point x de I , f est au dessus de sa tangente.
- 8) **Proposition** : si f est deux fois dérivable sur I , f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
- 9) **Inégalité de Jensen**² : f est convexe si et seulement si $\forall n \geq 1, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$

IV: Intégration d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$:

- 1) Intégrale d'une fonction en escalier.
- 2) Intégrale d'une fonction continue par morceaux.
- 3) Propriétés :
 - a) Linéarité.
 - b) Deux fonctions continues par morceaux qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont la même intégrale sur $[a, b]$.
 - c) Relation de Chasles³.
- 4) ► **Théorème fondamental de l'intégration** :

2. Johan Jensen, 1859 - 1925, mathématicien et ingénieur danois.
 3. Michel Chasles : 1793-1880 : mathématicien français.

a) **Théorème** : soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a pour dérivée f .

b) **Corollaire 1** : Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a)$$

c) **Corollaire 2** :

- soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$,
- soit $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision adaptée à f ,
- soit $x_0 \in [a, b]$,

la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est

- lipschitzienne, donc continue sur $[a, b]$,
- de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ et plus précisément : sur $[a, b] \setminus \sigma$, elle est dérivable et a pour dérivée f , et de plus elle admet comme dérivée à droite en a_i , la limite de f en a_i par valeurs supérieures et admet comme dérivée à gauche en a_{i+1} , la limite de f en a_i par valeurs inférieures.

5) **Intégration par parties** pour les fonctions continues.

6) **Changement de variables** : Soit f continue d'un intervalle I dans F et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans I .

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du. \text{ L'application } \varphi \text{ est appelée changement de variable.}$$

Cas d'un changement de variable bijectif :

$$\text{si } \varphi \text{ est de plus bijective alors } \int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

7) Applications élémentaires du changement de variable : intégration d'une fonction T -périodique sur un intervalle de longueur T , intégrale d'une fonction paire, impaire sur un intervalle centré en a . Généralisation.

8) **Définition** : *valeur moyenne de f sur $[a, b]$* $= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$. Formule de la moyenne (Hors-programme), si f est continue, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

9) **Proposition** : soit f **continue**, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et positive alors

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \implies \forall t \in [a, b], f(t) = 0.$$

V: Formules de Taylor⁴

1) **Formule de Taylor avec reste intégral(e)** (ou formule de Taylor-Laplace⁵) :

4. Brook Taylor : 1685-1731 : mathématicien anglais.

5. Pierre-Simon de Laplace : 1749-1827 : mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt$$

Autre énoncé : $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+uh) du.$

2) Inégalité de Taylor-Lagrange

soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ alors

$$\left\| f(b) - \left(f(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \right) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$$

3) ► Formule de Taylor-Young⁶ :

soit $f : I \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^n$, soit $a \in \overset{\circ}{I}$ alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

$$\iff f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

- 4) **Remarque :** Taylor + $\int$ et Taylor-Lagrange sont des formules **globales**, c'est-à-dire qu'elles permettent d'obtenir des propriétés globales d'une fonction : par exemple, une majoration de ladite fonction ou de ses dérivées sur un segment. En revanche, Taylor-Young est une formule **locale** et permet donc d'obtenir des propriétés locales au voisinage d'un point : calcul de limite, de dérivée, d'asymptote, position par rapport à une asymptote.

VI: Calculs de primitives :

- 1) Primitives des fonctions usuelles, primitive d'une fraction rationnelle (note : la décomposition en éléments simples n'est plus au programme de PC, ainsi que les fonctions Argsh et Argch).
- 2) Techniques de changement de variables : Règles de Charles Bioche⁷.
- 3) Intégrales abéliennes.

VII: Calculs approchés d'intégrales

1) Méthode des rectangles. Sommes de Riemann :

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, soit $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, et soit, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $c_{i,n} \in [a_i, a_{i+1}]$, on note $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)f(c_{i,n})$. On a alors $S_n \rightarrow \int_a^b f$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

2) Cas particulier :

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, soit $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ avec $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$, et soit, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $c_{i,n} \in [a_i, a_{i+1}]$, on note $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)f(c_{i,n})$. On a alors $S_n \rightarrow \int_a^b f$.

6. William Henry Young : 1863-1942 : mathématicien anglais.

7. Charles Bioche : 1859-1949 : mathématicien français.

► démonstration pour f lipschitzienne (admis dans les autres cas).

Cas fréquent : $a = 0, b = 1$ d'où
$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

3) **Méthode des trapèzes** : $T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \left(\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} \right).$

Théorème : si f est continue alors $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$ et si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\left\| \int_a^b f - T_n \right\| \leq \|f''\|_{\infty} \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

4) **Généralisation** : méthode de Simpson⁸, etc ...

VIII: Compléments de cours :

1) **Continuité uniforme.**

2) **Théorèmes d'approximation uniforme**

a) **Théorème** : Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

b) **Théorème de Weierstraß** : Soit f une fonction continue **sur un segment** $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$$

3) **Fonctions définies par une intégrale :**

Proposition : soit f continue et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ alors $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable et sa dérivée vaut $u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$.

4) **Lemme de Lebesgue**⁹ :

► **Proposition** : soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \exp(int) = 0$.

le prochain programme sera conforme aux normes.

8. Thomas Simpson : 1710-1761 : mathématicien anglais autodidacte

9. Henri Lebesgue : 1875-1941 : mathématicien français.