

du 24 au 28 novembre 2025

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 7 et d'icelui.

CHAPITRE 8 : ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET PRÉHILBERTIENS RÉELS

I: Généralités

1) Définitions :

- a) Produit scalaire.
- b) Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens réels.
- c) Norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

2) Exemples

3) ► Inégalité de Louis-Augustin Cauchy et Hermann Amandus Schwarz :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ avec égalité si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

4) Propriétés de la norme euclidienne :

- a) $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = O_E$
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$
- c) **Inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

5) Identités

- a) de polarisation : $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$,
- b) du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

6) Orthogonalité :

- a) **définitions** : vecteurs orthogonaux, s.e.v. orthogonaux, orthogonal d'un s.e.v.
- b) **Théorème de Pythagore** :
 - i) $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
 - ii) (x_1, \dots, x_p) famille orthogonale $\implies \|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$.
 - iii) **Corollaire** : une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- c) **Proposition** : $F \subset (F^\perp)^\perp$, exemple d'inclusion stricte.
- d) ► **Proposition** : une somme directe de s.e.v. 2 à 2 orthogonaux est directe.

II: Bases orthonormées

- 1) **Définition** : familles et bases O.N. Calculs dans une B.O.N.
- 2) **Proposition** : soit \mathcal{B} une B.O.N. et $A = ((a_{i,j})) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $a_{i,j} = (e_i | u(e_j))$.
- 3) ► **Théorème d'existence** : soit E euclidien, il existe des B.O.N. de E .

4) **Proposition** : Soit E euclidien, soit F s.e.v. de E , alors F et F^\perp sont supplémentaires.

On note $E = F \oplus F^\perp$.

5) **Théorème de la B.O.N. incomplète** : soit (e_1, \dots, e_p) une famille orthonormale dans un e.v. euclidien, on peut la compléter en une B.O.N.

6) **Proposition** : dans E euclidien : $(F^\perp)^\perp = F$.

III: ► Représentation des formes linéaires dans un e.v. euclidien :

1) **Théorème (HP)** :

Formes linéaires dans un e.v. euclidien :

Soit φ une forme linéaire de E euclidien, alors $\exists ! a \in E$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$.

2) **Corollaire** : équation cartésienne d'un hyperplan. Vecteur normal à un hyperplan.

IV: Projecteurs orthogonaux

1) **Définition** : Soit E euclidien, soit F un sev de E , le projecteur sur F parallèlement à F^\perp est appelé projecteur orthogonal sur F et est noté p_F .

Par conséquent, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$.

2) **Proposition** : soit p un projecteur, il est orthogonal $\iff \forall (x, y) \in E^2, (p(x)|y) = (x|p(y))$.

3) ► **Proposition** : soit p un projecteur, il est orthogonal $\iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

4) **Expression analytique dans une B.O.N.** : soit (e_1, \dots, e_p) une B.O.N. de F , le projeté orthogonal de x sur F , noté $p_F(x)$, vérifie : $p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x|e_i) e_i$.

Ecriture matricielle dans une B.O.N. : soit \mathcal{B} une B.O.N., on note E_i le vecteur colonne des coordonnées de e_i dans la base \mathcal{B} , alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{i=1}^p E_i E_i^T$.

5) **Théorème** : distance à un s.e.v. Soit F s.e.v. de E euclidien. On définit : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

a) ► $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

b) $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = (x|x - p_F(x))$.

6) Projection orthogonale sur une droite, sur un hyperplan.

7) **Symétrie orthogonale** : définition. **Proposition** : $s_F = 2p_F - Id_E$.

8) **Définition** : une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

9) **Proposition** : soient a et b deux vecteurs distincts tels que $\|a\| = \|b\|$, alors il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$.

10) Extension de ces notions pour E préhilbertien réel et F sev de E de dimension finie.

V: Jørgen Pedersen Gram - Erhard Schmidt

1) ► **Théorème** :

soit E euclidien, soit (a_1, \dots, a_p) une famille libre, alors il existe une unique famille O.N. (e_1, \dots, e_p) telle que :

a) $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(a_1, \dots, a_k)$.

b) $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (a_k|e_k) > 0$.

- 2) **Corollaire** : Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni d'un produit scalaire quelconque, il existe une B.O.N. de E échelonnée en degré.

VI: Isométries vectorielles

Soit E un e.v. euclidien.

- 1) **Définition** : u est un *automorphisme orthogonal* ou une *isométrie vectorielle* s'il conserve la norme ou le produit scalaire (ce qui est équivalent).
- 2) **Remarque** : Une isométrie vectorielle est un automorphisme.
- 3) **Proposition** : $\mathcal{O}(E)$ est un groupe pour la loi \circ , appelé groupe orthogonal.
- 4) **Proposition** : on a équivalence entre :
 - a) $u \in \mathcal{O}(E)$
 - b) u transforme toute B.O.N en B.O.N.
 - c) u transforme une B.O.N en B.O.N.
- 5) **Proposition** : soit $u \in \mathcal{O}(E)$, F stable par $u \implies F^\perp$ stable par u .
- 6) **Proposition** : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$ (mais u peut avoir des valeurs propres complexes non réelles).
- 7) **définition** : Matrice Orthogonale.
On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si l'endomorphisme canoniquement associé à M appartient à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

- 8) **Proposition** : on a équivalence entre :

 - a) $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
 - b) $M^T.M = I_n$.
 - c) $M.M^T = I_n$.
 - d) Les vecteurs colonnes de M forment une B.O.N.
 - e) Les vecteurs lignes de M forment une B.O.N.

- 9) **Proposition** : Soit B une B.O.N. de E et soit B' une base de E alors B' est une B.O.N. $\iff P = \text{Pass}_{B,B'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- 10) **Proposition** : Soit B une B.O.N. de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \text{mat}_B(u)$ alors $u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- 11) **Proposition** : $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies \det(M) = \pm 1$, $u \in \mathcal{O}(E) \implies \det(u) = \pm 1$ (mais la réciproque est fausse dans les deux cas).
- 12) **Définition** : groupe spécial orthogonal.
- 13) **Proposition** : Soit B une B.O.N.D. de E et soit B' une base de E alors B' est une B.O.N.D. $\iff P = \text{Pass}_{B,B'} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- 14) **Proposition** : Soit B une B.O.N. de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \text{mat}_B(u)$ alors $u \in \mathcal{SO}(E) \iff A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

VII: Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) et antisymétriques

E est ici un e.v. euclidien.

- 1) **Définition** : endomorphisme autoadjoint ou symétrique, antisymétrique. Notation $\mathcal{S}(E)$.
- 2) **Définition** : (HP) : adjoint d'un endomorphisme. Traduction matricielle.
- 3) Soit \mathcal{B} une B.O.N. et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors
 - u autoadjoint $\iff A$ symétrique.

- u antisymétrique $\iff A$ antisymétrique.

4) **Proposition** : u antisymétrique $\iff \forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.

5) **Proposition** : u symétrique ou antisymétrique et soit F stable par u alors F^\perp aussi.

6) **Proposition** : $\blacktriangleright u$ automorphisme orthogonal symétrique $\iff u$ symétrie orthogonale.

7) **Corollaire** : une symétrie n'est donc symétrique que si (et seulement si) elle est orthogonale.

8) **Proposition** : \blacktriangleright soit u symétrique ou antisymétrique alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.

9) **Proposition** : Soit u symétrique, les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.

\blacktriangleright **Théorème spectral** : Réduction des matrices et endomorphismes symétriques :

- 10) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, alors u est diagonalisable dans une B.O.N.
 b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors A est diagonalisable dans une B.O.N., i.e., $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), A = PDP^{-1} = PDP^T$.

11) **Remarques** :

- b) est la traduction matricielle de a).
- Si $A = PDP^T$ alors A est symétrique.
- Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas forcément diagonalisable.

VIII: Endomorphismes (ou matrices) symétriques positives et définies positives

E est ici un e.v. euclidien, u est un endomorphisme symétrique et A une matrice symétrique.

1) **Définition** :

- $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$.
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \forall x \in E \setminus \{0\}, (u(x)|x) > 0$.
- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$.
- $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A X > 0$.

2) \blacktriangleright **Proposition** :

- $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$.
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
- $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

IX: Etude de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$ où E est un e.v. euclidien orienté de dimension 2

1) **Proposition** :

soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ et soit \mathcal{B} une B.O.N.D. alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta)$
 et cette matrice ne dépend pas de la B.O.N.D. choisie. θ s'appelle l'angle de la rotation u .

2) Ecriture complexe d'une rotation du plan euclidien orienté.

3) Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ d'angle θ , soit x un vecteur non nul alors $\cos \theta = \frac{(a|u(a))}{||x||^2}$ et $\sin \theta = \frac{\det[x, u(x)]}{||x||^2}$.

- 4) Proposition : soient $(a, b) \in E^2$ collinéaire, tels que $\|a\| = \|b\| \neq 0$ alors $\exists! u \in \mathcal{SO}(E)$ tel que $u(a) = b$.
- 5) Définition : angle orienté de deux vecteurs non nuls dans le plan.
- 6) **Proposition** : Soit $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$.
- (i) soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une B.O.N.D. alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = S(\theta)$ et cette matrice **dépend** de la B.O.N.D. choisie.
- (ii) u est la réflexion par rapport à la droite D dirigée par le vecteur $\vec{u} = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$ où $\frac{\theta}{2} = (\vec{e}_1, \vec{u})$.

X: Compléments de cours

E est ici un e.v. euclidien.

- 1) F stable par $A \iff F^\perp$ stable par A^T . Applications.
- a) **Proposition** : $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B$.
- b) **Proposition** : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), A = {}^t B^T B$.
- 2) **Proposition** : (*racine carrée*)
- a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists! C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), A = C^2$.
- b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \exists! C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = C^2$.
- 3) **Proposition : réduction simultanée** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P^T \times P$ et $B = P^T \times D \times P$.
- 4) **Quotient de Rayleigh**
- a) Soit $u \in \mathcal{S}(E)$, on définit, pour $x \in E \setminus 0_E$, $q(x) = \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$
- b) **Proposition** : $\min \text{Sp}(u) \leq q(x) \leq \max \text{Sp}(u)$ et ces valeurs sont atteintes.
- c) **Traduction matricielle** : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = \frac{X^T A X}{X^T X}$
- Proposition** : $\min \text{Sp}(A) \leq q(X) \leq \max \text{Sp}(A)$ et ces valeurs sont atteintes.
- 5) **Proposition** : Une matrice antisymétrique réelle a ses valeurs propres dans $i\mathbb{R}$ et est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 6) **Proposition** : Soit u une isométrie vectorielle, alors on peut trouver une B.O.N. de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1×1 valant 1 ou -1 et des blocs de taille 2×2 de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
- Corollaire** : une matrice orthogonale est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 7) Toute matrice M de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en $M = K \times T$ où K est une matrice orthogonale et T une matrice triangulaire supérieure dont les coeff diagonaux sont strictement positifs.
- 8) Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable est orthotrigonalisable.

le prochain programme ne sera pas hors-norme ...