PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 7

du 17 au 21 novembre 2025

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 6 et d'icelui.

Chapitre 7 : Réduction des endomorphismes : 2ème démarque

V: Polynôme annulateur

1) **Définition :** polynôme d'endomorphisme, de matrice.
2) **Propositions :**
   a) Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent et $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.
   b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad A$ et B semblables $\Longrightarrow$ $P(A)$ et $P(B)$ semblables.
   c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\quad \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$.
   d) ► $\boxed{u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow P(u) \text{ diagonalisable}}$.
3) **Définition :** polynôme annulateur.
4) ► Proposition : Soit P annulateur de u alors $\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longrightarrow \lambda \text{ racine de } P}$.
5) ▲▼ **Théorème** : *Condition **nécessaire et suffisante** de diagonalisabilité* :
   $\boxed{u \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow \text{il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples}}$.
   De même pour une matrice, A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.
6) ► **Corollaire :** soit F un s.e.v. de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u alors $\boxed{u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow v \text{ diagonalisable}}$.
7) **Corollaire :** soit F un s.e.v. de E, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable alors F est stable par $u \Longleftrightarrow$ il existe une base de F formée de vecteurs propres de u.
8) ▲▼ **Théorème de Cayley [1]-Hamilton [2] :** [3]
   χ_u est un polynôme annulateur de u, χ_A est un polynôme annulateur de A.

VI: Compléments de cours :

1) **Proposition :**
   a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :
   a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
   b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :
   a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$.

---

1. Arthur Cayley : 1821 - 1895, mathématicien anglais.
2. William Hamilton : 1805-1865 : mathématicien, physicien et astronome irlandais.
3. Conformément à la loi de Stigler, la première démonstration du théorème est donnée par Ferdinand Georg Frobenius en 1878, Cayley l'ayant principalement utilisé dans ses travaux, et Hamilton l'ayant démontré en dimension 2.

c) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$a) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3.$$

d) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$a) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \ b) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \ c) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \ d) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \text{ avec } (\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^5 .$$

2) Codiagonalisation et cotrigonalisation

a) ▶ **Proposition :**

$\boxed{\text{si } u \circ v = v \circ u, \text{ le noyau, l'image et les sous-espaces propres de } u \text{ sont stables par } v}$.

b) ▶ **Théorème :** si $u \circ v = v \circ u$ et si u est diagonalisable à spectre simple alors v est diagonalisable dans la même base que u. Traduction matricielle.

c) **Théorème(HP) :** si $u \circ v = v \circ u$ et si u et v sont diagonalisables, alors ils sont diagonalisables dans une même base, on dit qu'ils sont **codiagonalisables**. Traduction matricielle.

d) **Théorème(HHP) :** si $u \circ v = v \circ u$ et si u et v sont trigonalisables, alors ils sont trigonalisables dans une même base, on dit qu'ils sont **cotrigonalisables**. Traduction matricielle.

e) **Applications :** équations matricielles.

3) Une matrice de rang 1 est diagonalisable ssi $\operatorname{tr} A \neq 0$.

4) Diagonalisation d'une matrice par blocs.

5) Applications de la diagonalisation :

a) Calcul de A^n.

b) Suites multirécurrentes

c) Récurrence linéaire multiple.

d) Systèmes différentiels.

e) Algorithme Pagerank

---

prochain programme : ev euclidiens et préhilbertiens réels) ...