PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 7

du 19 au 22 novembre 2024

Rappel : Le programme de colle en semaine 7 est constitué du programme de la semaine 6 et d'icelui.

Chapitre 8 : Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens réels

I: Généralités

1) **Définitions :**
   a) Produit scalaire.
   b) Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens réels.
   c) Norme euclidienne : $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
2) **Exemples**
3) ▶ **Inégalité de Louis-Augustin Cauchy et Hermann Amandus Schwarz :**
   $\boxed{|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,.\,||y|| \text{ avec égalité si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}}$
4) **Propriétés de la norme euclidienne :**
   a) $||x|| \geqslant 0$ et $||x|| = 0 \iff x = O_E$
   b) $||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$
   c) **Inégalité triangulaire :** $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.
5) **Identités**
   a) de polarisation : $(x|y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$,
   b) du parallélogramme : $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$
6) **Orthogonalité :**
   a) **définitions :** vecteurs orthogonaux, s.e.v. orthogonaux, orthogonal d'un s.e.v.
   b) **Théorème de Pythagore :**
      i) $x \perp y \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$
      ii) $(x_1, ..., x_p)$ famille orthogonale $\implies ||\sum x_i||^2 = \sum ||x_i||^2$.
      iii) **Corollaire :** une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
   c) **Proposition :** $F \subset (F^\perp)^\perp$, exemple d'inclusion stricte.
   d) ▶ **Proposition :** une somme directe de s.e.v. 2 à 2 orthogonaux est directe.

II: Bases orthonormées

1) **Définition :** familles et bases O.N. Calculs dans une B.O.N.
2) **Proposition :** soit $\mathcal{B}$ une B.O.N. et $A = ((a_{i,j})) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$.
3) ▶ $\boxed{\textbf{Théorème d'existence : } \text{soit } E \textbf{ euclidien}\text{, il existe des B.O.N. de } E}$.
4) **Proposition :** Soit E euclidien, soit F s.e.v. de E, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
   On note $\boxed{E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp}$.

5) **Théorème de la B.O.N. incomplète :** soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille orthonormale dans un e.v. **euclidien**, on peut la compléter en une B.O.N.

6) **Proposition :** dans E **euclidien** : $(F^\perp)^\perp = F$.

III: ▶ Représentation des formes linéaires dans un e.v. euclidien :

1) **Théorème (HP)** :

> Formes linéaires dans un **e.v. euclidien** :
> Soit φ une forme linéaire de E **euclidien**, alors $\exists!\, a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a|x)$.

2) **Corollaire :** équation cartésienne d'un hyperplan. Vecteur normal à un hyperplan.

IV: Projecteurs orthogonaux

1) **Définition :** Soit E euclidien, soit F un sev de E, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F et est noté p_F.
Par conséquent, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$.

2) **Proposition :** soit p un projecteur, il est orthogonal $\Longleftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ (p(x)|y) = (x|p(y))$.

3) ▶ **Proposition :** soit p un projecteur, il est orthogonal $\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

4) **Expression analytique dans une B.O.N. :** soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une B.O.N. de F, le projeté orthogonal de x sur F, noté $p_F(x)$, vérifie : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)\, e_i$.
Ecriture matricielle dans une B.O.N. : soit $\mathcal{B}$ une B.O.N., on note E_i le vecteur colonne des coordonnées de e_i dans la base $\mathcal{B}$, alors $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i E_i^T}$.

5) **Théorème :** distance à un s.e.v. Soit F s.e.v. de E euclidien. On définit : $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$.

> **a)** ▶ $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.
>
> **b)** $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = (x|x - p_F(x))$.

6) Projection orthogonale sur une droite, sur un hyperplan.

7) **Symétrie orthonale :** définition. **Proposition :** $s_F = 2p_F - Id_E$.

8) **Définition :** une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

9) **Proposition :** soient a et b deux vecteurs distincts tels que $||a|| = ||b||$, alors il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$.

10) Extension de ces notions pour E préhilbertien réel et F sev de E de dimension finie.

V: Jørgen Pedersen Gram - Erhard Schmidt

1) ▶ **Théorème :**

> soit E euclidien, soit $(a_1, \ldots, a_p)$ une famille libre, alors il existe une unique famille O.N. $(e_1, \ldots, e_p)$ telle que :
>
> **a)** $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_k)$.
>
> **b)** $\forall k \in [\![1, p]\!],\ (a_k|e_k) > 0$.

2) **Corollaire :** Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni d'un produit scalaire quelconque, il existe une B.O.N. de E échelonnée en degré.

VI: Isométries vectorielles Soit E un e.v. euclidien.

1) **Définition :** u est un *automorphisme orthogonal ou une isométrie vectorielle* s'il conserve la norme ou le produit scalaire (ce qui est équivalent).
2) **Remarque :** Une isométrie vectorielle est un automorphisme.
3) **Proposition :** $\mathcal{O}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe orthogonal.
4) ▶ **Proposition :** on a équivalence entre :
   a) $u \in \mathcal{O}(E)$
   b) u transforme toute B.O.N en B.O.N.
   c) u transforme une B.O.N en B.O.N.
5) **Proposition :** soit $u \in \mathcal{O}(E)$, F stable par $u \Longrightarrow F^{\perp}$ stable par u.
6) **Proposition :** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$ (mais u peut avoir des valeurs propres complexes non réelles).
7) **définition :** Matrice Orthogonale.
   On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si l'endomorphisme canoniquement associé à M appartient à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
8) ▶ **Proposition :** on a équivalence entre :
   a) $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   b) $M^T.M = I_n$.
   c) $M.M^T = I_n$.
   d) Les vecteurs colonnes de M forment une B.O.N.
   e) Les vecteurs lignes de M forment une B.O.N.
9) **Proposition :** Soit B une B.O.N. de E et soit B' une base de E alors B' est une B.O.N. $\Longleftrightarrow P = \mathrm{Pass}_{B,B'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
10) **Proposition :** Soit B une B.O.N. de E, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{mat}_B(u)$ alors $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
11) **Proposition :** $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \det(M) = \pm 1,\ u \in \mathcal{O}(E) \Longrightarrow \det(u) = \pm 1$ (mais la réciproque est fausse dans les deux cas).
12) **Définition :** groupe spécial orthogonal.
13) **Proposition :** Soit B une B.O.N.D. de E et soit B' une base de E alors B' est une B.O.N.D. $\Longleftrightarrow P = \mathrm{Pass}_{B,B'} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
14) **Proposition :** Soit B une B.O.N. de E, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{mat}_B(u)$ alors $u \in \mathcal{SO}(E) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

VII: Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) et antisymétriques E est ici un e.v. euclidien.

1) **Définition :** endomorphisme autoadjoint ou symétrique, antisymétrique. Notation $\mathcal{S}(E)$.
2) **Définition :** (HP) : adjoint d'un endomorphisme. Traduction matricielle.
3) Soit $\mathcal{B}$ une B.O.N. et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors
   - u autoadjoint $\Longleftrightarrow A$ symétrique.
   - u antisymétrique $\Longleftrightarrow A$ antisymétrique.
4) **Proposition :** u antisymétrique $\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$.
5) **Proposition :** u symétrique ou antisymétrique et soit F stable par u alors $F^{\perp}$ aussi.

6) **Proposition :** ▶ u automorphisme orthogonal symétrique $\iff$ u symétrie orthogonale.

7) **Corollaire :** une symétrie n'est donc symétrique que si (et seulement si) elle est orthogonale.

8) **Proposition :** ▶ soit u symétrique ou antisymétrique alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux .

9) **Proposition :** Soit u symétrique, les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.

10) ▶ **Théorème spectral :** Réduction des matrices et endomorphismes symétriques :

  a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, alors u est diagonalisable dans une B.O.N.

  b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors A est diagonalisable dans une B.O.N. , i.e. , $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\exists D \in D_n(\mathbb{R})$, $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

11) **Remarques :**

- b) est la traduction matricielle de a).
- Si $A = PDP^T$ alors A est symétrique.
- Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas forcément diagonalisable.

VIII: Endomorphismes (ou matrices) symétriques positives et définies positives

E est ici un e.v. euclidien, u est un endomorphisme symétrique et A une matrice symétrique.

1) **Définition :**

- $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \forall x \in E, (u(x)|x) \geqslant 0.$
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \forall x \in E\backslash\{0\}, (u(x)|x) > 0.$
- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T AX \geqslant 0.$
- $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, X^T AX > 0.$

2) ▶ **Proposition :**

- $\boxed{u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+}$.
- $\boxed{u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*}$.
- $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+}$.
- $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$.

IX: Etude de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$ où E est un e.v. euclidien orienté de dimension 2

1) **Proposition :**

soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une B.O.N.D. alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta)$ et cette matrice ne dépend pas de la B.O.N.D. choisie. θ s'appelle l'angle de la rotation u.

2) Ecriture complexe d'une rotation du plan euclidien orienté.

3) Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ d'angle θ, soit x un vecteur non nul alors $\cos\theta = \dfrac{(a|u(a))}{||x||^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\det[x, u(x)]}{||x||^2}$.

4) Proposition : soient $(a, b) \in E^2$ollaire, tels que $||a|| = ||b|| \neq 0$ alors $\exists!\, u \in \mathcal{SO}(E)$ tel que $u(a) = b$.

5) Définition : angle orienté de deux vecteurs non nuls dans le plan.

6) **Proposition :** Soit $u \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$.

(i) soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une B.O.N.D. alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S(\theta)$ et cette matrice **dépend** de la B.O.N.D. choisie.

(ii) u est la réflexion par rapport à la droite D dirigée par le vecteur $\vec{u} = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ où $\frac{\theta}{2} = (\vec{e}_1, \vec{u})$.

X: Compléments de cours

E est ici un e.v. euclidien.

1) F stable par $A \iff F^{\perp}$ stable par A^T. Applications.

   a) ▶**Proposition :** $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B}$.

   b) **Proposition :** $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tB^T B}$.

2) ▶ **Proposition :** (*racine carrée*)

   a) $\boxed{\text{Soit } A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists!\, C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ A = C^2}$.

   b) $\boxed{\text{Soit } A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists!\, C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ A = C^2}$.

3)

4) **Proposition : réduction simultanée** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P^T \times P$ et $B = P^T \times D \times P$.

5) **Quotient de Rayleigh**

   a) Soit $u \in \mathcal{S}(E)$, on définit, pour $x \in E \backslash 0_E$, $\quad q(x) = \dfrac{(x|u(x))}{||x||^2}$

   b) ▶ **Proposition :** $\min \mathrm{Sp}(u) \leqslant q(x) \leqslant \max \mathrm{Sp}(u)$ et ces valeurs sont atteintes.

   c) **Traduction matricielle :** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad q(X) = \dfrac{X^T A X}{X^T X}$
   Proposition : $\min \mathrm{Sp}(A) \leqslant q(X) \leqslant \max \mathrm{Sp}(A)$ et ces valeurs sont atteintes.

6) **Proposition :** : Une matrice antisymétrique réelle a ses valeurs propres dans $i\mathbb{R}$ et est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7) **Proposition :** Soit u une isométrie vectorielle, alors on peut trouver une BON de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1×1 valant 1 ou -1 et des blocs de taille 2×2 de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
   Corollaire : une matrice orthogonale est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

le prochain programme est en cours d'analyse