PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 6

du 3 au 7 novembre 2025

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 5 et d'icelui.

Chapitre 7 : Rééducation des endomorphismes

I: Eléments propres

1) **Définitions :** valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice.
2) **Proposition :** $E_0 = \operatorname{Ker} u$, $E_\lambda \subset \operatorname{Im} u$ si $\lambda \neq 0$.
3) **Proposition :** Si u stabilise une droite vectorielle D, alors le vecteur directeur de D est vecteur propre.
4) ▶ **Proposition :** Une famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est en somme directe.
5) ▶ **Corollaire :** Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

II: Polynôme caractéristique

On se place dorénavant en dimension finie.

1) **Définitions :** polynôme caractéristique d'une matrice : $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
2) ▶ **Théorème :** $\boxed{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \lambda \text{ racine de } \chi_A}$.
3) **Proposition :** $\chi_{A^T} = \chi_A$ ce qui implique $\operatorname{Sp}(A^T) = \operatorname{Sp}(A)$.
4) **Proposition :** Si A et B sont semblables, $\chi_A = \chi_B$
5) **Définition :** polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
6) ▶ **Théorème :** $\boxed{\chi_A(x) = x^n - \operatorname{tr}(A)\,x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$.
7) Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(x) = x^n - \operatorname{tr}(u)\,x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$
8) ▶ **Théorème :** si χ_A est scindé *(ce qui est toujours le cas dans* $\mathbb{C}[X]$*)*, de racines $(x_1, \ldots, x_n)$ comptées avec leur multiplicité, alors : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = \operatorname{tr}(A) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = \det(A)}$.
9) **Définition :** ordre ou multiplicité d'une valeur propre λ : c'est la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.
10) **Proposition :** Soit A une matrice **réelle** (ou u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ e.v.), on peut considérer A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit alors λ une valeur propre de A **complexe non réelle** d'ordre α et soit X un vecteur propre associé à λ, alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A d'ordre α également et $\bar{X}$ est vecteur propre de A associé à $\bar{\lambda}$.

11) ▶ **Théorème :** si F est stable par u, et soit v l'endomorphisme de F induit par u, alors χ_v divise χ_u.

12) ▶ **Théorème :** Soit λ une valeur propre d'ordre α, alors $\boxed{1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant \alpha}$.
Corollaire : si λ est valeur propre simple alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

III: Diagonalisation

1) **Définition :** Endomorphismes et matrices diagonalisables

2) **Proposition :** Soit u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors u diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A diagonalisable.

3) **Proposition :** On a équivalence entre :
   - **a)** u diagonalisable .
   - **b)** Il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
   - **c)** $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ avec $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

4) ▶ **Théorème :** $\boxed{u \text{ diagonalisable} \Longleftrightarrow \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda_i \in \operatorname{Sp}(u),\ \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i}$ où α_i est la multiplicité de λ_i dans χ_u.

5) ▶ **Corollaire :** *Condition **suffisante** de diagonalisabilité :*
$\boxed{\text{si } \chi_u \text{ est scindé à racines simples, alors } u \text{ est diagonalisable}}$.

6) **Remarque :** un endomorphisme ou une matrice peut-être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$.

IV: Trigonalisation

1) **Définition :**
   - **a)** On dit qu'un endomorphisme u est **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
   - **b)** On dit qu'une matrice A est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure : ie, $\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\,, T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ tels que $A = PTP^{-1}$.

2) **Proposition :** une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

3) ▶ $\boxed{\textbf{Théorème :} \text{ si } \chi_u \text{ (ou } \chi_A\text{) est scindé alors } u \text{ (ou } A\text{) est trigonalisable}}$.

4) **Corollaire :** toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5) ▶ **Application :**
A nilpotente $\Longleftrightarrow$ A semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte $\Longleftrightarrow$ $\chi_A(x) = x^n$.

---

prochain programme : réduction (2ème démarque) ...