

Rappel : Le programme de colle en semaine 5 est constitué du programme de la semaine 4 et d'icelui.

Chapitre 7 : Rééducation des endomorphismes

I : Eléments propres

- 1) **Définitions** : valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice.
- 2) **Proposition** : $E_0 = \text{Ker } u$, $E_\lambda \subset \text{Im } u$ si $\lambda \neq 0$.
- 3) **Proposition** : Si u stabilise une droite vectorielle D , alors le vecteur directeur de D est vecteur propre.
- 4) **Proposition** : Une famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est en somme directe.
- 5) **Corollaire** : Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

II : Polynôme caractéristique

On se place dorénavant en dimension finie.

- 1) **Définitions** : polynôme caractéristique d'une matrice : $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
- 2) **Théorème** : $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda \text{ racine de } \chi_A$.
- 3) **Proposition** : $\chi_{A^T} = \chi_A$ ce qui implique $\text{Sp}(A^T) = \text{Sp}(A)$.
- 4) **Proposition** : Si A et B sont semblables, $\chi_A = \chi_B$.
- 5) **Définition** : polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
- 6) **Théorème** : $\chi_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$.
- 7) Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(x) = x^n - \text{tr}(u)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$.
- 8) **Théorème** : si χ_A est scindé (ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}[X]$), de racines $(x_1, \dots, x_n)$ comptées avec leur multiplicité, alors : $\sum_{i=1}^n x_i = \text{tr}(A)$ et $\prod_{i=1}^n x_i = \det(A)$.
- 9) **Définition** : ordre ou multiplicité d'une valeur propre λ : c'est la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.
- 10) **Proposition** : Soit A une matrice **réelle** (ou u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ e.v.), on peut considérer A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit alors λ une valeur propre de A **complexe non réelle** d'ordre α et soit X un vecteur propre associé à λ , alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A d'ordre α également et $\bar{X}$ est vecteur propre de A associé à $\bar{\lambda}$.
- 11) **Théorème** : si F est stable par u , et soit v l'endomorphisme de F induit par u , alors χ_v divise χ_u .

12) ► **Théorème** : Soit λ une valeur propre d'ordre α , alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$.

Corollaire : si λ est valeur propre simple alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

III : Diagonalisation

1) **Définition** : Endomorphismes et matrices diagonalisables

2) **Proposition** : Soit u un endomorphisme de E , $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors u diagonalisable $\iff A$ diagonalisable.

3) **Proposition** : On a équivalence entre :

a) u diagonalisable .

b) Il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

c) $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ avec $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

4) ► **Théorème** : u diagonalisable $\iff \chi_u$ scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda_i \in \text{Sp}(u), \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$ où α_i est la multiplicité de λ_i dans χ_u .

5) ► **Corollaire** : Condition **suffisante** de diagonalisabilité :

si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

6) **Remarque** : un endomorphisme ou une matrice peut-être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$.

IV : Polynôme annulateur

1) **Définition** : polynôme d'endomorphisme, de matrice.

2) **Propositions** :

a) Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent et $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.

b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A et B semblables $\implies P(A)$ et $P(B)$ semblables.

c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \text{Sp}(u) \implies P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$.

d) ► u diagonalisable $\implies P(u)$ diagonalisable.

3) **Définition** : polynôme annulateur.

4) ► Proposition : Soit P annulateur de u alors $\lambda \in \text{Sp}(u) \implies \lambda$ racine de P .

5) ♦ **Théorème** : Condition **nécessaire et suffisante** de diagonalisabilité :

u est diagonalisable $\iff$ il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

De même pour une matrice, A diagonalisable $\iff$ il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

6) ► **Corollaire** : soit F un s.e.v. de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u alors u diagonalisable $\implies v$ diagonalisable.

7) **Corollaire** : soit F un s.e.v. de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable alors F est stable par $u \iff$ il existe une base de F formée de vecteurs propres de u .

8) ♦ **Théorème de Cayley¹-Hamilton²** :³

χ_u est un polynôme annulateur de u , χ_A est un polynôme annulateur de A .

9) La notion de polynôme minimal est strictement hors-programme.

1. Arthur Cayley : 1821 - 1895, mathématicien anglais.

2. William Hamilton : 1805-1865 : mathématicien, physicien et astronome irlandais.

3. Conformément à la loi de Stigler, la première démonstration du théorème est donnée par Ferdinand Georg Frobenius en 1878, Cayley l'ayant principalement utilisé dans ses travaux, et Hamilton l'ayant démontré en dimension 2.

V : Trigonalisation

1) Définition :

- a) On dit qu'un endomorphisme u est **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- b) On dit qu'une matrice A est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure : ie, $\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ tels que $A = PTP^{-1}$.

2) Proposition : une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

3) ► Théorème : si χ_u (ou χ_A) est scindé alors u (ou A) est trigonalisable.

4) Corollaire : toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5) ► Application :

A nilpotente $\iff A$ semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte $\iff \chi_A(x) = x^n$.

6) Proposition :

- a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

- b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$.

- c) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$.

- d) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors M est semblable à l'une des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^5$.

jusqu'à 100 % de réduction sur le prochain programme.