PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 5

du 13 au 17 octobre 2025

Le programme de colle de cette semaine est constitué du programme de la semaine 4 et d'icelui.

Chapitre déterminant

Note : la définition du déterminant à partir du groupe symétrique ($\det A = \sum \varepsilon(\sigma)...$) est strictement hors-programme.

I: Déterminant dans une base de n vecteurs dans un e.v. de dimension n :

1) Définition : forme n-linéaire alternée. Caractérisation.

2) Théorème admis : (i) L'ensemble des forme n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est une droite vectorielle.
(ii) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ telle que $\varphi(e_1, ..., e_n) = 1$.

3) propriétés liées à la n-linéaire alternitude :

- **a)** ajouter une CL des autres vecteurs à un vecteur ne modifie pas le déterminant.
- **b)** le déterminant dans la base e d'une famille liée est nul.

4) Proposition : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases, alors $\det_{\mathcal{B}} = \alpha \det_{\mathcal{B}'}$ avec $\alpha = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

5) ► **Théorème :** Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ n vecteurs de E de dimension n . C'est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

II: Déterminant d'une matrice carrée :

1) Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$, on définit $\det A = \det_{\mathcal{BC}}(C_1, \ldots, C_n)$.

2) Propriétés liées au fait que *det* est n-linéaire alterné :

3) Propriétés :

- **a)** $\det AB = \det A \times \det B$
- **b) Corollaire :** le déterminant est un invariant de similitude.
- **c)** ► $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$ et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
- **d)** ▲▼ déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : $\boxed{\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det B \times \det D}$.

4) Propositions :

- **a)** si A est triangulaire, $\det A = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$.
- **b)** $\det A^T = \det A$.
- **c) Déterminant d'un endomorphisme :** c'est le déterminant de sa matrice dans une base quelconque. Cette définition est licite car ne dépend pas de la base choisie.

d) Développement suivant une colonne ou une ligne :

i) ▶ : $\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \text{ (développement suivant la } j\text{-ème colonne)}}$

ii) ▶ : $\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \text{ (développement suivant la } i\text{-ème ligne)}}$.

iii) ▶ **Corollaire :**
$\boxed{\text{le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale de ses coefficients}}$.

iv) ▶ **Proposition :** soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, soit $x \in \mathbb{K}$, alors $\det(A + xB)$ est un polynôme en x de degré $\leqslant n$.

v) **Hors-Programme :** $A \times (\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T \times A = (\det A)\, I_n$.
Corollaire : si A est inversible $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com}(A))^T$

e) ▶ **Proposition :** Soit u un endomorphisme de E, $u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.

III: ▶ déterminant d'Alexandre Théophile Vandermonde[1] :

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)}$$

IV: Equations et systèmes linéaires :

1) **Définitions :** équation linéaire $f(x) = b$, compatibilité d'une équation linéaire, équation linéaire homogène associée.

2) **Théorème :** Soit $(E) : f(x) = b$ une équation linéaire, soit $(H) : f(x) = b$ l'équation linéaire homogène associée, alors $\mathcal{S}_{(E)} = \mathcal{S}_{(H)} + x_0$ où x_0 est une solution particulière de (E).

3) **Proposition :** soit $p = \dim E, n = \dim F$, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $r = \operatorname{rang} f$.
   - si $r = n$, alors f est surjective et (E) est toujours compatible.
   - si $r < n$, alors f n'est pas surjective et (E) n'est pas toujours compatible.
   - si $r = p$, alors f est injective, et si (E) est compatible, alors la solution est unique.
   - si $r < p$, alors f n'est pas injective, et si (E) est compatible, alors il n'y a pas unicité de la solution.
   - si $r = p = n$ alors f est bijective et il y a (E) admet une et une seule solution.

4) Si E est de dimension finie, alors $(E) : f(x) = b$ se traduit matriciellement par $(S) : AX = B$.

5) Méthode pratique de résolution d'un système linéaire : (méthode du pivot de Gauss)

6) **Formules de Cramer (HP) :** Soit $(S) : AX = B$ un système de Cramer, qui admet donc une unique solution. La $i$ème coordonnée de X est $x_i = \dfrac{\det[C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n]}{\det A}$

V: Orientation d'un e.v. : définition : soit $\mathcal{B}$ une base de E, on dit que $\mathcal{B}'$ est une base directe si $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$, (indirecte sinon).

1. En un mot.

VI: Applications des déterminants à la géométrie :

Condition d'alignement de trois points dans le plan, de coplanarité de quatre points de l'espace, de concourance de trois droites du plan, de quatre plans de l'espace, de cocyclicité de 4 points du plan non alignés 3 par 3, de cosphéricité de 5 points non coplanaires 4 par 4.

Corollaires : équation d'une droite du plan passant par deux points, d'un plan de l'espace passant par trois points non alignés, d'un cercle du plan passant par trois points non alignés, d'une sphère de l'espace passant par 4 points non coplanaires.

---

le prochain programme fera l'objet de réductions ...