PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 4

du 15 au 18 octobre 2024

Rappel : Le programme de colle en semaine 4 est constitué du programme de la semaine 3 et d'icelui.

Chapitre déterminant

Note : la définition du déterminant à partir du groupe symétrique ($\det A = \sum \varepsilon(\sigma)\ldots$) *est strictement hors-programme.*

I : Déterminant dans une base de n vecteurs dans un e.v. de dimension n :

1) **Définition :** forme n-linéaire alternée.
2) **Propriété admise :** L'ensemble des forme n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est une droite vectorielle.
3) **Définition :** Soit E un $\mathbb{K}$.e.v. de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ telle que $\varphi(e_1, ..., e_n) = 1$. On appelle $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$, c'est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$.
4) ▶ **Théorème :** Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ n vecteurs de E,

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E \Longleftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

II : Déterminant d'une matrice carrée :

1) **Définition :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$, on définit $\det A = \det_{\mathcal{BC}}(C_1, \ldots, C_n)$.
2) **Propriétés liées au fait que** *det* **est n-linéaire alterné :**
   a) L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie $\det A$ par -1.
   b) L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $i \neq j$ laisse $\det A$ invariant.
   c) L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie $\det A$ par λ.
   d) **Corollaire :** : déterminant d'une matrice diagonale
3) **Propriétés :**
   a) $\det AB = \det A \times \det B$
   b) **Corollaire :** le déterminant est un invariant de similitude.
   c) ▶ $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \det A \neq 0$ et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
   d) ▲▼ déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : $\boxed{\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det B \times \det D}$.
4) **Propositions :**
   a) si A est triangulaire, $\det A = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$.
   b) $\det A^T = \det A$.
   c) **Déterminant d'un endomorphisme :** c'est le déterminant de sa matrice dans une base quelconque. Cette définition est licite car ne dépend pas de la base choisie.

d) Développement suivant une colonne ou une ligne :

i) ▶ : $\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ (développement suivant la } j\text{-ème colonne)}}$

ii) ▶ : $\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ (développement suivant la } i\text{-ème ligne)}}$.

iii) ▶ **Corollaire :**

$\boxed{\text{le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale de ses coefficients}}$.

iv) ▶ **Proposition :** soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, soit $x \in \mathbb{K}$, alors $\det(A + xB)$ est un polynôme en x de degré $\leqslant n$.

v) Hors-Programme : $A \times (\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T \times A = (\det A)\, I_n$.

Corollaire : si A est inversible $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Com}(A))^T$

e) ▶ **Proposition :** Soit u un endomorphisme de E, $u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.

III : ▶ déterminant d'Alexandre Théophile Vandermonde[1] :

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)}$$

IV : Equations et systèmes linéaires :

1) **Définitions :** équation linéaire $f(x) = b$, compatibilité d'une équation linéaire, équation linéaire homogène associée.

2) **Théorème :** Soit $(E) : f(x) = b$ une équation linéaire, soit $(H) : f(x) = b$ l'équation linéaire homogène associée, alors $\mathcal{S}_{(E)} = \mathcal{S}_{(H)} + x_0$ où x_0 est une solution particulière de (E).

3) **Proposition :** soit $p = \dim E, n = \dim F$, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $r = \operatorname{rang} f$.
   - si $r = n$, alors f est surjective et (E) est toujours compatible.
   - si $r < n$, alors f n'est pas surjective et (E) n'est pas toujours compatible.
   - si $r = p$, alors f est injective, et si (E) est compatible, alors la solution est unique.
   - si $r < p$, alors f n'est pas injective, et si (E) est compatible, alors il n'y a pas unicité de la solution.
   - si $r = p = n$ alors f est bijective et il y a (E) admet une et une seule solution.

4) Si E est de dimension finie, alors $(E) : f(x) = b$ se traduit matriciellement par $(S) : AX = B$.

5) Méthode pratique de résolution d'un système linéaire : (méthode du pivot de Gauss)

6) **Formules de Cramer (HP) :** Soit $(S) : AX = B$ un système de Cramer, qui admet donc une unique solution. La $i$ème coordonnée de X est $x_i = \dfrac{\det[C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n]}{\det A}$

V : Orientation d'un e.v. :

définition : soit $\mathcal{B}$ une base de E, on dit que $\mathcal{B}'$ est une base directe si $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$, (indirecte sinon).

---

1. En un mot.

VI : Applications des déterminants à la géométrie :

Condition d'alignement de trois points dans le plan, de coplanarité de quatre points de l'espace, de concourance de trois droites du plan, de quatre plans de l'espace, de cocyclicité de 4 points du plan non alignés 3 par 3, de cosphéricité de 5 points non coplanaires 4 par 4.

Corollaires : équation d'une droite du plan passant par deux points, d'un plan de l'espace passant par trois points non alignés, d'un cercle du plan passant par trois points non alignés, d'une sphère de l'espace passant par 4 points non coplanaires.

---

jusqu'à 75 % de réduction sur le prochain programme (semaine du 4 novembre).