PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 3

du 8 au 11 octobre 2024

Rappel : Le programme de colle en semaine 3 est constitué du programme de la semaine 2 et d'icelui.

Chapitre 5 : Matrices

I : Généralités :

1) **Définitions :** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, base canonique, matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme.
2) **Proposition :** l'application $\theta : u \longmapsto \text{mat}(u)_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ est une bijection.
3) **Définition : application linéaire canoniquement associée à une matrice** .
4) **Définition : endomorphisme canoniquement associé à une matrice** .
5) **Opérations sur les matrices :** addition, multiplication par une constante, produit.
6) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension np . Matrices élémentaires.
7) **Propriétés :** $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

II : Algèbre des matrices carrées

1) **Proposition :** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de ces trois lois est une $\mathbb{K}$ algèbre non commutative, non intègre, isomorphe à $\mathcal{L}(E)$.
2) **le groupe** $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
   - ► **Proposition :** $\boxed{\text{Soient } (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ , } AB = I_n \Longrightarrow BA = I_n}$.
   - $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par le produit et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   - **Proposition :** si $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow u \in \mathcal{GL}(E)$ et de plus $A^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$.
3) **Matrices triangulaires et diagonales.**
   - **Proposition :** $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K}), \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, n$, stables par le produit.
   - **Caractérisation des endomorphismes canoniquement associés à une matrice triangulaire :**
     soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$.
     $\boxed{A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \forall\, k \in [\![1,n]\!], u(e_k) \in Vect(e_1,...,e_k) \text{ .}}$
   - ► **Proposition :** Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes.
4) a) ► **Théorème :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(A) = 0$.
   b) ► **Corollaire :** si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $A^{-1} = Q(A)$.
   c) ► **Application :** Soit $\mathcal{F}$ un sev $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par $\times$ et contenant I_n, et soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in \mathcal{F}$.

5) **Proposition :** Soit E un $\mathbb{K}$.e.v. de dimension n, soit F s.e.v. de dimension p et soit $\mathcal{B}$ une base adaptée, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
u stabilise F si et seulement si $\operatorname{mat}(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

6) **généralisation** Soit $E = F_1 \oplus ... \oplus F_n$, u stabilise tous les F_i si et seulement si $\operatorname{mat}(u)_{\mathcal{B}}$ est diagonale par blocs avec chaque bloc de taille $\dim F_i$.

III : Rang d'une matrice.

1) Définition.

2) **Proposition :** si $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ alors $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} u$.

3) **Proposition :**
   a) $\operatorname{rang} A \times B \leqslant \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.
   b) si A inversible, $\operatorname{rang} A \times B = \operatorname{rang} B$.
   c) si B inversible, $\operatorname{rang} A \times B = \operatorname{rang} A$.

IV : Changement de base.

1) **Définition d'une matrice de passage.**
Proposition : soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, cette matrice est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

2) Pour les vecteurs : $\boxed{X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'}$ où X et X' sont les vecteurs colonnes des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3) **Proposition :** $Y = AX$ est la traduction matricielle de $y = u(x)$.

4) **Théorème :** Pour les applications linéaires, si $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u$ et si $B = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} u$, alors $\boxed{B = Q^{-1}AP}$. On dit alors que A et B sont ***équivalentes***. (définition Hors-Programme)

5) ▶ **Théorème :** Pour les endomorphismes, si $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$ et si $B = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'} u$, alors $\boxed{B = P^{-1}AP}$. On dit alors que A et B sont ***semblables***.
▶ **Théorème :** deux matrices carrées sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

6) **Théorème :** (Hors-Programme) : $\boxed{\operatorname{rang} A = r \iff A = QJ_rP^{-1}}$.
Corollaire : $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

V : Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

1) Définition

2) Propriétés :
   - $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   - La trace est un invariant de similitude.

3) Trace d'un endomorphisme : $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} A$ où A est la matrice de u dans une base arbitraire.
Application : pour un projecteur : ▶ : $\boxed{\operatorname{tr} p = \operatorname{rang} p}$.

4) Hyperplan des matrices de trace nulle. Base de cet hyperplan.

VI : Produit par blocs.

Produit par blocs. Matrices diagonales par blocs. Matrices inversibles par blocs

le prochain programme sera déterminants.