PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 2

du 30 septembre au 4 octobre 2024

- Le programme de colle est glissant sur deux semaines. C'est-à-dire qu'en semaine n (à partir de $n \geqslant 2$), les élèves seront interrogés sur les programmes $n-1$ et n.
  Le programme de colle en semaine 2 est, de ce fait, constitué du programme de la semaine 1 et d'icelui.

Chapitre 3 : Algèbre générale

I : Arithmétique :

- relation de de divisibilité, division euclidienne.
- l'ensemble des nombres premiers est infini,
- le Théorème de Gauss,
- décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers.

II : Polynômes :

1) définition, degré, valuation .

2) divisibilité, division euclidienne

3) Polynômes irréductibles. Décomposition d'un polynômes en polynômes irréductibles.

4) Racines d'un polynôme. Polynômes scindés.

5) Théorème de d'Alembert-Gauss

6) Théorème : un polynôme de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicité. (égalité dans $\mathbb{C}$).

7) **Proposition :** racines complexes d'un polynôme réel.

8) Décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

9) Relations coefficients/racines.

III : Structures algébriques usuelles :[1]

1) **Définitions :**

- **a)** Groupes
- **b)** Anneaux
- **c)** Corps
- **d)** $\mathbb{K}$ algèbre

2) **Relations** : d'ordre, d'équivalence.

---

1. aucun exercice n'est à poser sur ces notions

Chapitre 4 : Algèbre linéaire

I : Définitions :

1) **Définitions et exemples :** Applications linéaires, (endomorphismes, isomorphismes, automorphismes), s.e.v.
2) **groupe linéaire de E. Proposition :** C'est un groupe pour la loi $\circ$.
3) **Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs**. Cas d'un ensemble fini et infini.
4) **définitions :** $\operatorname{Ker} u, \operatorname{Im} u$,
5) **Restrictions et corestrictions :** u restreint à un sev E_1 de E et/ou corestreint à un sev F_1 de F, $\operatorname{Ker} u_{|E_1}, \operatorname{Im} u_{|E_1}, \operatorname{Ker} u_{|E_1}^{|F_1}, \operatorname{Im} u_{|E_1}^{|F_1}$
6) **Définition :** Soit E un Kev, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et soit F un sev de E stable par u, définition de l'endomorphisme de F *induit* par u.
7) **Définition :** $\operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I}$: s.e.v. engendré par la famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ de E.
8) **Définition :** $\operatorname{Vect}(A)$: s.e.v. engendré par A où A est une partie de E.
9) **Espace vectoriel produit :** $E \times F$, généralisation à $E_1 \times ... \times E_r$.
10) **Somme de sev** : $E_1 + E_2$, généralisation à la somme de r sev : $E_1 + ... + E_r$.
11) **Somme directe** de p s.e.v. de E :
    Définition :

    Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E, on dit que $E_1, \dots, E_p$ sont en **somme directe** si l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow E_1 + \cdots + E_p \\ (x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 + \cdots + x_p \end{array} \right.$ est injective.

    - Interprétation par l'unicité de la décomposition
    - cas particulier où $p = 2$, F et G sont en somme directe $\Longleftrightarrow F \cap G = \{0\}$.
    - équivalence fausse si $p \geqslant 3$.
12) **s.e.v. supplémentaires.** Distinction entre supplémentaire et complémentaire.
13) ► **Théorème :** Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des s.e.v. supplémentaires.
    Généralisation à $E = F_1 \oplus ... \oplus F_n$: une application linéaire de E dans G est entièrement déterminée par ses restrictions à $F_1, ..., F_n$.
14) **définition :** projecteur, symétrie.
15) ► **Théorème noyau-image :** u induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\operatorname{Im} u$.

II : Familles libres, génératrices, bases.

1) **Définitions :** famille libre, liée, génératrice, base .
2) **Coordonnées d'un vecteur dans une base.**
3) **Propriétés :**
    - Une famille de deux vecteurs est liée ssi ils sont colinéaires.
    - **Remarque :** équivalence fausse pour une famille de trois vecteurs et plus.
    - On a l'**équivalence** : $(x_i)_{i\in I}$ famille libre et $(x_i)_{i\in I} \cup \{x\}$ famille liée $\Longleftrightarrow$ $x \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
    - Une famille est liée ssi un vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
    - Une sous-famille d'une famille libre est libre.
    - Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

- Une sur-famille d'une famille liée est liée.

4) **Image d'une famille par une application linéaire :**
   a) **Propositions :**
      i) L'image d'une famille libre par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ injective est une famille libre.
      ii) L'image d'une famille génératrice par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective est une famille génératrice
      iii) L'image d'une base par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective est une base.
      iv) L'image d'une famille génératrice par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ quelconque est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
      v) L'image d'une famille liée par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ quelconque est liée.
   b) **Théorème :** si u transforme une base de E en une base de F, c'est un isomorphisme.

5) ▶ **Théorème :** Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
   Corollaire : Deux applications linéaire qui coïncident sur une base sont égales.

III : Cas de la dimension finie.

1) **définitions-propriétés :**
   - Un K.e.v est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice de cardinal fini.
   - ▶ **Lemme d'Ernst Steinitz :** Toute famille de vecteurs de cardinal $\geqslant n+1$ d'un sev engendré par n vecteurs est liée.
   - **Proposition :** Les bases ont toutes le même cardinal, appelé *dimension de l'espace.*

2) ▶ **Proposition :** : une famille de polynôme échelonnée en degré (ou en valuation) est une base de $\mathbb{K}[X]$ ou $\mathbb{K}_n[X]$.

3) ▲▼ **Théorème de la base incomplète** (démonstration non exigible) :
   a) **Théorème :** Un e.v. de dimension finie admet une base.
   b) **théorème de la base incomplète :**

On peut compléter une famille libre $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ avec des vecteurs d'une base de E pour obtenir une base.

   c) **Théorème :** soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille génératrice, il en existe une sous-famille qui est une base.

4) **Théorème :** soit E un K.e.v. de dimension n, une famille libre de cardinal n est une base, une famille génératrice de cardinal n est une base.

5) ▶ **Théorème :** soit E un K.e.v. de dimension finie, tout s.e.v. F admet un supplémentaire (et même une infinité si F n'est pas trivial .

6) **Théorème de la décomposition adaptée et théorème de recollement.**

7) **Définition d'une base adaptée.**

8) **Théorème :** $\dim E = \dim F \iff E \sim F$

9) **Propriétés :**
   - $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.
   - $\dim E^n = n \dim E$.
   - ▶ $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$,
   - $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$
   - $\dim E^* = \dim E$.
   - Soient F et G deux s.e.v. de E, ($F \subset G$ et $\dim F = \dim G$) $\Longrightarrow F = G$.
   - Soient F et G deux s.e.v. de E, $E = F \oplus G \underset{(}{\sim} F \cap G = \{O_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$).

IV : Rang d'une application linéaire :

1) **Définition :** $\operatorname{rang} u = \dim \operatorname{Im} u$.

2) **Proposition :** si E et F sont de dimension finie, alors $\operatorname{rang} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

3) **Proposition :** soient u et v deux applications linéaires :

   a) $\operatorname{rang} u \circ v \leqslant \min(\operatorname{rang} u, \operatorname{rang} v)$

   b) si u est un isomorphisme, $\operatorname{rang} u \circ v = \operatorname{rang} v$

   c) si v est un isomorphisme, $\operatorname{rang} u \circ v = \operatorname{rang} u$

4) ▶ **Théorème du rang :**

   - Si E est de dimension finie, $\boxed{\dim E = \operatorname{rang} u + \dim \operatorname{Ker} u}$
   - **Corollaire :** si $\dim E = \dim F$ alors u injective $\Longleftrightarrow$ u bijective $\Longleftrightarrow$ u surjective.
   - **Remarque :** ces équivalences sont fausses en dimension infinie .

5) ▶ **Polynômes d'interpolation de Joseph-Louis Lagrange :**
Soient $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ deux à deux distincts et soient $b_1, \ldots, b_n \in K^n$ alors $\exists! P \in K_{n-1}[X]$ tel que pour tout i, $P(a_i) = b_i$. Expression de P.

6) ▶ **Formule d'Hermann Grassmann :**
Soient F et G deux sev de E, $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$.

7) Soient $F_1, ..., F_n$, n s.e.v. de E de dimension finies,
alors $F_1, ..., F_n$ sont en somme directe $\Longleftrightarrow \dim \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

V : Formes linéaires et hyperplans :

1) ▶ **Théorème :** le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan, et réciproquement, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

2) **Proposition :** deux formes linéaires ayant le même noyau sont proportionnelles.

3) **Proposition :** un s.e.v. de dimension p dans un K.e.v. de dimension n est l'intersection de $n-p$ hyperplans.