PC $\overset{\star}{2}$

Colles semaine 1

du 15 au 19 septembre 2025

- Chaque colle commencera systématiquement par une question de cours.
- ▲▼ désigne une proposition, un théorème ou un résultat dont l'énoncé doit être parfaitement connu, mais dont la démonstration est hors-programme ou n'est pas exigible.
- ► désigne une proposition, un théorème ou un résultat dont l'énoncé à connaître et dont la démonstration est à connaître également.
- Il faut savoir qu'aux concours, les candidats sont fréquemment interrogés sur des questions de cours. Les points du cours retenus sont : 1) ceux qui tombent fréquemment aux concours, 2) ceux qui sont particulièrement importants, 3) ceux dont la démonstration met en jeu des raisonnements qui peuvent être utiles en exercice.

Chapitre 1 : Rappels et compléments sur les suites réelles et complexes

I: Généralités

1) **Définition :** définition d'une suite, d'une suite bornée, d'une suite convergente.
2) Une suite convergente est toujours bornée.
3) **Théorèmes généraux de convergence :** somme, produit de suites convergentes, combinaison linéaire, inverse, composition par une fonction continue.
4) **Proposition :** convergence d'une suite complexe

II: Suites extraites

1) définition d'une suite extraite ou sous-suite.
   Proposition : une sous-sous suite est une sous-suite.
2) ► **Théorème :** si un converge alors ses sous-suites aussi.
3) Définition d'une valeur d'adhérence.
4) **Remarque :** Par contraposée, si une suite admet deux valeurs d'adhérence distinctes alors elle diverge.
5) **Théorème :** si u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers la même limite ℓ alors u_n aussi.

III: Suites réelles

1) suite majorée, minorée, suite divergente en $\pm\infty$, Théorème des  .

2) **Théorème :** tout réel est limite d'une suite de rationnels.

3) ► : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4) **Parties denses dans $\mathbb{R}$.**

5) Approximation à 10^{-n} près par défaut et par excès d'un réel.

6) **Théorème de Bolzano-Weierstrass (HP) :** toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

7) Une suite bornée qui n'admet qu'une valeur d'adhérence est convergente.

8) Définition et propriétés des suites adjacentes.

IV: relations de comparaisons

1) **Définition :** Equivalents, relation de domination

2) **Suites de références :**
Théorème : $\boxed{(\ln n)^\beta << n^\alpha << a^n << n! << n^n}$ où $<<$ signifie "négligeable devant" et où α et β sont des réels positifs et $a > 1$.

3) exemples.

V: Cesàro

1) **Théorème de Cesàro :** si $u_n \to \ell$ alors $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \to \ell$.

2) ► **Cesàro généralisé :** soit a_n le terme général d'une série à termes positifs divergente, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ, alors $v_n = \dfrac{\sum_{k=0}^n a_k u_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \to \ell$.

3) **lemme de l'escalier :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{n+1} - u_n \to \ell$ alors $u_n \sim n\ell$.

VI: Autres méthodes de convergence

- Sommes de Riemann (qui seront revues dans le chapitre sur l'intégration), Suites définies implicitement.

VII: Suites récurrentes

1) Cas général, cas où f croissante, décroissante, ► contractante.

2) ► équivalent d'une suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ qui tend vers 0 avec $f(x) = x - ax^p + o(x^p)$.

Chapitre 2 : Séries Numériques

I: Généralités

1) Définitions d'une série, convergence ou divergence d'une série $\sum u_n$.
2) Somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, reste d'ordre n d'une série convergente : $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.
3) **Condition Nécessaire de convergence :** $\boxed{\sum u_n \text{ converge} \Longrightarrow u_n \to 0}$ mais la réciproque est fausse.
4) Lien suite/séries : si $u_n = a_{n+1} - a_n$ alors $\sum u_k$ convergente $\Longleftrightarrow$ la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5) Opérations sur les séries : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ aussi et $\sum_{\mathbb{N}}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{\mathbb{N}} u_n + \mu \sum_{\mathbb{N}} v_n$.

II: Séries à termes positifs : toutes les suites considérées dans cette partie sont **à termes positifs**.

1) $\sum u_k$ converge $\Longleftrightarrow$ les sommes partielles S_n sont majorées.
2) **Théorèmes de comparaison, d'équivalents de séries à termes positifs.**
3) ▶ **Séries de Riemann :** $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Longleftrightarrow \alpha > 1}$.
4) ▶ **Théorème :**
   - **a)** si $\exists \alpha > 1$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ ou $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ ou $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^\alpha})$ alors $\sum u_k$ CV.
   - **b)** si $\exists \alpha \leqslant 1$ et et $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ ou $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ ou $\frac{1}{n^\alpha} = \mathcal{O}(u_n)$ alors $\sum u_k$ DV.
5) **Proposition :**
   - **a)** ▶ si $\alpha > 1, R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$
   - **b)** ▶ si $\alpha < 1, S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
6) ▶ **Règle de Jean le Rond d'Alembert :**
   - **a)** si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ avec $0 \leqslant k < 1$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_k$ CV. (c'est le cas si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < 1$).
   - **b)** si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ à partir d'un certain rang alors $\sum u_k$ DV. (c'est le cas si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 1$).
7) **Séries de Joseph Bertrand (HP) :** $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ CV} \Longleftrightarrow (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)}$.
8) ▶ **Proposition : sommation des relations de comparaison :**

   si $u_n \sim v_n$ et
   - **a)** si $\sum u_n$ CV alors $\sum_{n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{n+1}^{\infty} v_k$
   - **b)** si $\sum u_n$ DV alors $\sum_{0}^{n} u_k \sim \sum_{0}^{n} v_k$

de même, si $u_n = o(v_n)$ (resp.$O(v_n)$) et

a) si $\sum v_n$ CV alors $\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} u_k = o(\sum_{n+1}^{\infty} v_k)$ (resp. $O(...)$)

b) si $\sum u_n$ DV alors $\displaystyle\sum_{0}^{n} u_k = o(\sum_{0}^{n} v_k)$ (resp. $O(...)$)

III: Séries à termes quelconques :

1) **Définition :** séries absolument convergentes.

2) **Proposition :** $\boxed{\text{une série ACV est CV}}$.

3) **Définition :** $\exp(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

4) **Définition :** : séries semi-convergentes, séries alternées.

5) ▶ : **Critère spécial des séries alternées :**

> Soit $u_n = (-1)^n a_n$ tel que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, positive et tendant vers 0 alors
>
> **a)** $\sum u_n$ CV ,
>
> **b)** R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$,
>
> **c)** $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Remarque : ce résultat reste valable, même si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne décroît qu'à partir d'un certain rang N (dans ce cas, (ii) et (iii) ne valent qu'à partir du rang N).

6) **Méthode d'éclatement des termes.**

7) ⬍ **Produit de Louis-Augustin Cauchy :**

soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

> **Proposition :** Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont ACV alors $\sum c_n$ est ACV et $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$.

IV: Comparaison série-intégrale :

Soit f une fonction positive, continue par morceaux, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. alors pour tout $k \geqslant 1$,

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{dt} \leqslant f(k)$$

d'où l'on déduit

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{dt} \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{dt}$$

Remarque : si f est croissante, les inégalités sont inversées.

V: Compléments de cours

1) **Règle de Jean-Marie Constant Duhamel :**
Soit $u_n > 0$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ alors il existe une constante A telle que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$.

2) **Transformation d'Abel :** Soient (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k$.

(ii) On en déduit que si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 alors $\sum u_n v_n$ converge.

Application : convergence de $\displaystyle\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}, \sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}, \sum \frac{\exp(in\theta)}{n^\alpha}$.

3) **Remarque :** Modifier l'ordre des termes d'une série semi-convergente peut modifier sa somme ou même sa nature.

Prochain programme : Structures algébriques. Espaces vectoriels.