Primitives : l'intégrale

« Behind my romanticism lies a primitive woman with primitive hungers. » Anaïs Nin, *The Diary of Anaïs Nin*, Volume 4, 1944-1947.

1. **Formulaire** le symbole $\displaystyle\int f(t)\mathrm{dt}$ signifie primitive de f, où f est une fonction continue sur I.

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{t} = \ln|t| + K$
- $\displaystyle\int t^a\,\mathrm{dt} = \frac{t^{a+1}}{a+1} + K$ si $a \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\cos^2 t} = \tan t + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\sin^2 t} = -\operatorname{cotan} t + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\operatorname{sh}^2 t} = -\coth t + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\cos t} = \ln|\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})| + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\sin t} = \ln|\tan(\frac{t}{2})| + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\operatorname{ch} t} = 2\arctan(e^t) + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\operatorname{sh} t} = \ln|\operatorname{th}(\frac{t}{2})| + K$
- $\displaystyle\int \tan t\,\mathrm{dt} = -\ln|\cos t| + K$
- $\displaystyle\int \operatorname{cotan} t\,\mathrm{dt} = -\ln|\sin t| + K$
- $\displaystyle\int \operatorname{th} t\,\mathrm{dt} = \ln|\operatorname{ch} t| + K$
- $\displaystyle\int \coth t\,\mathrm{dt} = \ln|\operatorname{sh} t| + K$

pour $a > 0$

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{t-a}{t+a}| + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \ln|t + \sqrt{t^2 + a^2}| + K = \operatorname{Argsh}\frac{t}{a} + K$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \ln|t + \sqrt{t^2 - a^2}| + K = \operatorname{Argch}\frac{t}{a} + K$ sur $]a, +\infty[$ et $\operatorname{Argch}\frac{-t}{a} + K$ sur $]-\infty, -a[$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{|a|} + K = -\arccos\frac{t}{|a|} + K'$

plus généralement : • $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dt}}{b^2t^2 + a^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bt}{a} + K \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{b^2t^2 + a^2} = \frac{1}{ab}\frac{\pi}{2}$

2. **Primitive d'une fraction rationnelle :** *Note : La décomposition d'une fraction rationnelle n'est plus au programme de PC*, cependant il est bon de savoir décomposer une fraction rationnelle relativement simple (en éléments simples).*
Après décomposition en éléments simples, le calcul de la primitive d'une fraction rationnelle se ramène au calcul de :
(i) primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{(t-a)^k}$ (ii) de $t \longmapsto \dfrac{at+b}{t^2 + rt + s}$ (iii) de $t \longmapsto \dfrac{at+b}{(t^2 + rt + s)^k}$.

3. **Primitive d'une fraction rationnelle :**
   (a) Polynômes en $\sin t, \cos t$: $\displaystyle\int \cos^p t \sin^q t\,dt$
   (i) si p impair, on pose $u = \sin t$. (ii) si q impair, $u = \cos t$. (iii) si p et q pair, on linéarise.
   (b) Fraction rationnelle en $\sin t, \cos t$: $\displaystyle\int f(t)\mathrm{dt}$. Règles de Bioche[1] :
   On considère l'élément différentiel : $f(t)\mathrm{dt}$

1. Charles Bioche Paris 1859 - Férrières en Brie 1949. Cadet d'une famille de quatre enfants, il fait ses études à Lyon puis à Paris au Collège Stanislas. Normalien, ami de Henri Bergson et Gaston Milhaud depuis l'Ecole normale supérieure, il obtient l'agrégation de mathématiques en 1884. Il débute sa carrière à Mâcon puis Poitiers et Douai et la prolonge à Paris au lycée Michelet, retrouve son Collège Stanislas puis est nommé au lycée Louis le Grand en 1897 où il reste jusqu'à sa retraite en 1925. Charles Bioche consacre une grande partie de sa carrière à l'enseignement secondaire des mathématiques. Il dirige ainsi une publication éditée par Hatier intitulée *Les sciences à la première moitié du baccalauréat* entre juillet 1930 et décembre 1931 dont le but principal est « de venir en aide aux candidats que les épreuves de sciences imposées dans tous les baccalauréats de première sans distinction, effrayent parfois beaucoup ».

i. si $f(-t)d(-t) = f(t)dt$ alors on pose $u = \cos t$,
ii. si $f(\pi - t)d(\pi - t) = f(t)dt$ alors on pose $u = \sin t$,
iii. si $f(\pi + t)d(\pi + t) = f(t)dt$ alors on pose $u = \tan t$,
iv. si au moins 2 des 3 précédentes propriétés sont vérifiées, on pose $u = \cos 2t$,
v. si rien ne marche, on pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$.

(c) Polynômes en $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t$: $\displaystyle\int \operatorname{ch}^p t \operatorname{sh}^q t \, dt$

(i) si p impair, on pose $u = \operatorname{sh} t$. (ii) si q impair, $u = \operatorname{ch} t$. (iii)si p et q pair, on linéarise.

(d) Fraction rationnelle en $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t$: $\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t$ On considère l'élément différentiel : $f(t)\mathrm{d}t$

(i) On peut appliquer les règles de Bioche en adaptant les sh en sin et les ch en cos, (ii) sinon, on peut toujours poser $u = e^t$, (iii) ou bien $u = \operatorname{th} \dfrac{t}{2}$.

4. **Changements de variables :**

(a) i. fonction en $\sqrt{1-t^2}$: on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$,
ii. fonction en $\sqrt{t^2-1}$: on pose $t = \operatorname{ch} u$ si $t \geqslant 1$ ou $t = \operatorname{ch}(-u)$ si $t \leqslant -1$,
iii. fonction en $\sqrt{t^2+1}$: on pose $t = \operatorname{sh} u$.

(b) Intégrales abéliennes [2] :

i. Fonctions de t et de $\left(\dfrac{at+b}{ct+d}\right)^{1/n}$: On pose $u = \dfrac{at+b}{ct+d}$ et on obtient une fraction rationnelle.
ii. Fonctions de t et de $\sqrt{at^2+bt+c}$:
On met $at^2 + bt + c$ sous forme canonique et on applique les changements de variable précédents.

2. Niels Henrik Abel , 1802 - 1829 : mathématicien norvégien.
À l'aube du XIXe siècle, Abel allait révolutionner les mathématiques, si bien qu'Hermite a pu déclarer : « Il a laissé aux mathématiciens de quoi s'occuper pendant cinq cents ans.»
Niels Henrik Abel, second fils d'une famille de sept enfants, naquit le 5 août 1802 dans l'île de Frindoë. Dès sa quinzième année, il lut et assimila les travaux les plus difficiles d'Euler et de Lagrange, et manifesta une passion pour les mathématiques. Lorsque, à la mort de son père, Abel, alors âgé de dix-huit ans, vit retomber sur ses épaules la responsabilité matérielle de sa mère et de sa famille, il donna des leçons particulières et dut fournir un travail épuisant pour continuer simultanément ses travaux personnels. Il contracta alors la maladie qui devait l'emporter.
Après une année passée à l'université de Christiania, Abel obtint une bourse pour un voyage d'un an en France. Il partait avec, en poche, un mémoire révolutionnaire sur l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations du cinquième degré, qui aurait dû, semblait-il, lui ouvrir les portes du monde mathématique. Sa première déception fut l'accueil de Gauss, le « prince des mathématiciens », qui mit purement et simplement le mémoire de côté sans le lire ! Il rédige un autre mémoire, également très précurseur, sur ce qui s'appellera par la suite les intégrales abéliennes. Abel arrive à Paris en juillet 1826 pour y rencontrer les plus grands mathématiciens français de l'époque, Cauchy et Legendre, et là encore se heurte à la négligence et à l'incompréhension : Cauchy, chargé de présenter à l'Institut les travaux d'Abel, les égare et ne retrouvera le manuscrit perdu qu'en 1830, après la mort de l'auteur et à la suite d'une démarche diplomatique du consul de Suède-Norvège. Ses espérances brisées, Abel, très démuni et profondément atteint d'une tuberculose pulmonaire, rejoint la Norvège où il mourut dans sa vingt-septième année, le 6 avril 1829.
Les deux premiers mémoires d'Abel, publiés en 1824 et 1826, concernent la résolution des équations. Pour comprendre toute l'importance du problème à cette époque, rappelons que, dès le XVIe siècle, les mathématiciens étaient en possession de formules exprimant, au moyen de radicaux portant sur les coefficients de l'équation, les racines d'une équation de degré $\leqslant 4$; pendant trois siècles, tous les efforts pour obtenir des expressions analogues dans le cas de l'équation générale du cinquième degré demeurèrent vains et ce problème était réputé d'une difficulté insurmontable. Presque enfant, Abel avait cru obtenir un tel résultat. Lorsqu'il s'aperçut de son erreur, il s'attacha alors à démontrer avec succès qu'une telle formule n'existait pas. À ce propos, il donne des critères de résolubilité par radicaux et étudie de nouveaux types d'équations, appelées de nos jours équations abéliennes, possédant cette propriété. (...)
La démarche essentielle de la pensée d'Abel (qu'il appelle « méthode générale »), non seulement s'oppose à la méthode, souvent pratiquée jusqu'alors de passage du particulier au général, mais se traduit par une recherche systématique de la démonstration minimale la plus adaptée à la nature du problème posé : « Avant Abel la pureté de la méthode n'est qu'un luxe de l'exposition mathématique, mais avec lui elle devient l'instrument même de l'analyse» (J. Vuillemin, La Philosophie de l'algèbre).