



« Baseball players or cricketers do not need to be able to solve explicitly the non-linear differential equations which govern the flight of the ball. They just catch it. »,
Paul Ormerod, *The Death of Economics* (1994), Part I, Chapter 5.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1447 Centrale 2019

On considère l'équation différentielle $(E) : 2xy' + y = \frac{1}{1-x}$. a) Résoudre (E) sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
b) Montrer qu'il existe une unique solution sur $] -\infty, 1[$.
c) Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 1448 Ens 2018

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 1-périodique. Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = f$.
L'équation (E) possède-t-elle des solutions 1-périodiques ? Si oui, y a-t-il unicité ?

Exercice 1449 Soit $p \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et y une solution non nulle de $(E) : y'' + p(t)y = 0$. Montrer que y s'annule un nombre fini de fois.

Exercice 1450 X 2021 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = (1 + x^2)y$. On pourra introduire les opérateurs $A : f \mapsto -f' + Id \times f$ et $B : f \mapsto f' + Id \times f$.

Exercice 1451 X 2018 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non constante. Montrer que $(E) : y'' + 2y' + 2y = f(t)$ ne peut avoir deux solutions périodiques.

Exercice 1452 X 2006, 2011 et 2021¹

Soient $(q_1, q_2) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, q_2(x) \geq q_1(x)$. On considère $\begin{cases} (E_1) : y'' + q_1(x)y = 0 \\ (E_2) : y'' + q_2(x)y = 0 \end{cases}$
a) Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E_1) et (E_2) alors entre deux zéros consécutifs de y_1 , y_2 s'annule au moins une fois. ( considérer la fonction $z = y_1 y_2' - y_1' y_2$)
b) Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \lambda \leq q(x) \leq \mu$. Soit y une solution de $(E) : y'' + q(x)y = 0$.
Montrer que y a une infinité de zéros et que deux zéros consécutifs a et b vérifient : $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \leq b - a \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

1. C'est le Théorème des zéros entrelacés de Charles Sturm : 1803-1855 mathématicien français.
C. Sturm est répétiteur puis professeur à l'Ecole Polytechnique et succède à Poisson à la chaire de mécanique à la faculté des sciences. On lira avec profit son *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, téléchargeable à <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k927425>.

Exercice 1453*Le très classique lemme² de Grönwall³*

Soient f et g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \geq 0, g(t) \geq 0$ et $f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u) du$.

Montrer que $\forall t \geq 0, f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(u) du\right)$

Exercice 1454*Mines 2022 et 2023*

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$, g la solution du problème de Cauchy $y' + \omega y = f$ avec $y(0) = 0$.

a) Exprimer g à l'aide de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{\omega t} dt$.

b) On suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et on note $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)|$.

Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que $\|g\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\omega}$.

c) On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on note $\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$.

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\|g\|_1 \leq \frac{\|f\|_1}{\omega}$.

d) On suppose f de carré intégrable sur $[0, +\infty[$ et on note $\|f\|_2 = \int_0^{+\infty} f^2$.

Montrer que g est aussi de carré intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\|g\|_2 \leq \frac{1}{\omega} \|f\|_2$.

LES AUTRES

Exercice 1455*X 2022*

Déterminer les entiers naturels $n \geq 1$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, le caractère borné de $f^{(n)} + f$ implique celui de f .

Exercice 1456*X 2017*

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = y^2$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 1457*Centrale 2022*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel $(E): X' = AX$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) On suppose A non inversible.

i) Montrer que (E) possède une solution constante non nulle.

ii) Soit $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ solution de (E) . Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \langle L, X(t) \rangle = \alpha$.

b) On suppose A antisymétrique. Montrer que le produit scalaire de deux solutions de (E) est constant. En déduire que, pour toute solution X de (E) , il existe une sphère S de centre 0 telle que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in S$.

2. Certains lemmes sont chauds (Lebesgue, ...), celui-ci en fait partie.

3. Thomas Hakon Grönwall :1877-1932 : mathématicien suédois.

**Exercice 1458***Mines 2023*

Soit le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x' &= -8x + y - 5z \\ y' &= 3x + 6z \\ z' &= 16x + y + 10z \end{cases}$$

À quelle condition sur $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en $t = 0$ a-t-on :

– $M(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t \rightarrow +\infty$?

– $M(t)$ est périodique ? Dans ce cas, montrer que la trajectoire est contenue dans un plan P dont on donnera une équation cartésienne dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 1459***Ens Lyon 2021*

Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, B une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = [A(t), B(t)]$. Montrer que le polynôme caractéristique de $A(t)$ est indépendant de t .

**Exercice 1460***X 2021*

Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe une application continue R_A de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute application X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t)$ et tout $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$, on ait $X(t_1) = R_A(t_0, t_1)X(t_0)$.

b) On suppose que $A(t)$ est de trace nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$, $\det(R_A(t_0, t_1)) = 1$.

Ind. Montrer que, pour toute matrice B et pour tous vecteurs U, V , $\det(BU, V) + \det(U, BV) = \text{Tr}(B) \det(U, V)$.

c) On suppose que A est 1-périodique. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $R_A(n, 0) = R_A(1, 0)^n$.

d) On suppose que A est 1-périodique et que, pour tout réel t , $A(t)$ est de trace nulle. Montrer que s'il existe une solution bornée non nulle alors $|\text{Tr}(R_A(1, 0))| \leq 2$.

e) On garde les mêmes hypothèses sur A et on veut établir une réciproque partielle. On suppose que $|\text{Tr}(R_A(1, 0))| < 2$. Montrer que toutes les solutions sont bornées.

**Exercice 1461***Mines 2019*

Soient $\alpha > 0$, (E) l'équation différentielle $xy' + \alpha y = \frac{1}{1+x}$ et $f : x \mapsto \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^\alpha}{\alpha}$.

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que (E) possède une unique solution prolongeable par continuité en 0.

c) L'équation différentielle (E) possède-t-elle des solutions développables en série entière au voisinage de l'origine ?

**Exercice 1462***Centrale 2019*

Soit $\lambda \in]-1, 1[$. Trouver les solutions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ qui sont développables en série entière autour de 0 sur $\mathbb{R}$. Sont-ce les seules solutions ?

**Exercice 1463***Centrale 2022*

On pose $H : t \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos u) du$.

- a) Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$. b) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner les expressions de H' et de H'' . c) Montrer que H est solution de l'équation différentielle $ty'' + y' + ty = 0$. d) Montrer que H est développable en série entière. e) Trouver une expression explicite de $W_n = \int_0^\pi (\cos u)^{2n} du$ et en déduire les coefficients du développement en série entière de H .
g) Limite de H en $+\infty$?
-

Exercice 1464 *X 2023*

- a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer s'il existe $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DSE telle que $xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$.
b) On suppose $\lambda = 2$. Expliciter les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ (on admet que sur chacun des deux intervalles l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2).
c) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.
-

Exercice 1465 *Mines 2022*

Déterminer, en fonction du réel λ , la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'' + \lambda y' + xy = 0$ qui sont la somme d'une série entière.

Exercice 1466 *X 2019*

On considère, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation différentielle $(E_\lambda) (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$. Déterminer les rayons de convergence possibles d'une solution non nulle de (E_λ) développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1467

Soit p un polynôme de degré n et q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(H) : p(t)y' + q(t)y = 0$.
a) Donner un majorant de $\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$.
b) Adapter ce résultat au cas où (H) a un second membre.

Exercice 1468  *X 2022* Déterminer les réels λ pour lesquels il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + (\lambda - x^2)f(x) = 0, f(0) = 0$, et f tende vers 0 en $+\infty$.
Ind. Considérer $g : x \mapsto f(x)e^{x^2/2}$.

Exercice 1469 *Mines 2018*

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $y'' + y' + y = \frac{\cos(nx)}{n^3}$.
b) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
c) Résoudre $y'' + y' + y = f$.
-

Exercice 1470 *X 2020*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, positive, décroissante et non intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit $y : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, non identiquement nulle et vérifiant $y'' + fy = 0$.
a) Est-il possible d'avoir $y \geq 0$? On pourra considérer $E = fy^2 + (y')^2$.
b) Soit $t_0 > 0$ tel que $y(t_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \setminus \{t_0\}, y(t) \neq 0$.
c) Déduire de a) que y s'annule. Montrer que y admet une infinité de zéros. Comment interpréter le résultat d'un point de vue physique ?

Exercice 1471*X 2018* Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $q > 0$, $q' > 0$.Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1472*X 2021*Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que q' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $q(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Montrer que les solutions de $y'' + (q+1)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1473*Ens 2009*Soient $(p, q) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ avec $q < 0$ et $(E) : y'' + py' + qy = 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Exercice 1474*X 2022*Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x)$.

Exercice 1475*Mines 2023*Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre $f''(x) + f(-x) = x$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1476*Mines 2022*On note E l'espace vectoriel des fonctions bornées de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a > 0$. Pour $f \in E$, on considère l'équation différentielle $(E_f) : y' - ay = f$. a) Montrer que pour tout $f \in E$, il existe une unique solution de (E_f) appartenant à E , que l'on notera $\varphi(f)$. b) Montrer que φ constitue un endomorphisme de E , et en déterminer le noyau. c) Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

Exercice 1477*X 2023*Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$.

$$\text{On note } W_n(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

a) On suppose qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout $t \in I$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) = 0$. Que vaut $W_n(f_1, \dots, f_n)$?b) On suppose que $W_n(f_1, \dots, f_n)$ est la fonction nulle et que $W_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})$ ne s'annule pas sur I . Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$.*Ind.* On admettra que, si $a_0, \dots, a_{n-2}$ sont des fonctions continues sur I , alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Exercice 1478*Ens 2018*Soit f continue et φ telle que $\varphi'' - f\varphi = 0$.On définit le wronskien de deux fonctions : $w(\varphi, \psi) = \varphi\psi' - \varphi'\psi$.

1. Que peut-on dire sur le wronskien ?
2. Montrer que φ s'annule une infinité de fois .

Indication : utiliser $\psi = \sin(\alpha(t - y))$ où y est un point où φ s'annule.

Exercice 1479



Mines 2021

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $y'' + fy = 0$. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$.

- a) Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ et $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Que peut-on dire de w ?
 - b) Montrer que $\mathcal{S}$ contient des fonctions non bornées.
-

Exercice 1480



X 2021 Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que q' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $q(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Montrer que les solutions de $y'' + (q + 1)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1481



Ens 2009

Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ qui à $g \in E$ associe $\Phi(g) : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ ne stabilise aucun sous-espace de dimension finie non nul de E .

Exercice 1482



X 2009

$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f'$. Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ T = D$?

Exercice 1483



X 2020

Soit φ et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- a) Trouver les $v \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $v'' = -\varphi$, $v'(0) = 1$ et $v(0) = 0$.

- b) Soit, pour $c > 0$, u_c la solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} -u_c'' + c^2 u_c = \varphi + c^2 g \\ u_c'(0) = 1 \\ u_c(0) = 0 \end{cases}.$$

On suppose que (u_c) converge uniformément vers u lorsque $c \rightarrow 0$. Trouver u .

Exercice 1484



X 2023

Soient $\lambda > 0$ et $x, y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, $x' = -xy$ et $y' = xy - \lambda y$.

- a) Montrer que x et y admettent des limites en $+\infty$. Ces limites sont-elles nulles ?
 - b) Montrer qu'il existe $K > 0$ et $\mu > 0$ tels que $y(t) \sim K e^{-\mu t}$ quand $t \rightarrow +\infty$.
-

Exercice 1485



X 2022

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(f(x)) + \frac{1}{2} \sin x$. Montrer que f prend ses valeurs dans $[-\pi, \pi]$.

Exercice 1486



X 2020

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. b) Montrer que $|||A||| \leq \text{tr}(A)$.

- c) Soit $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ dérivable telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\text{tr}(B'(t)) \leq -\text{tr}(B(t))$.

Montrer que $B(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
