



« Knowing what is big and what is small is more important than being able to solve partial differential equations. »
Stanislaw Ulam, *Adventures of a Mathematician*, New York 1976.

LES BASIQUES

Exercice 1364  X 2012 Dérivée de $x \mapsto \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt} dt$?

Exercice 1365  Mines 2022 et 2025
Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.
Montrer que f est continue. Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$?
Que valent $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

Exercice 1366  Mines 2022
Etudier les extrema locaux et globaux de $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto y(x^2 + \ln(y)^2)$.

Exercice 1367  Mines 2014
Déterminer les extrema de $f : (x, y) \in [0, \pi]^2 \mapsto \sin x + \sin y + \sin(x + y)$.

Exercice 1368  Mines 2024 et 2025
Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Déterminer f .

Exercice 1369  Ens 2024
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^2$ et telles que $f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 1370  Mines 2022
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de $\frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Ind. Utiliser le changement de variable $(u, v) = (x, xe^{y^2/2})$.

Exercice 1371  Centrale 2009
Soient $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y > 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, v^2 - 4u > 0\}$ et $\Psi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (xy, x + y)$.
a) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ réalise une bijection de U_1 sur U_2 .
b) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(U_1, \mathbb{R})$ telles que : $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y - x) f$.

1. le concours, l'année, l'examineur, la note...

Exercice 1372  Mines 2022 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable.

a) Montrer l'équivalence entre

(i) $f(0) = I_n$ et $f'(x) = f'(0) f(x)$ pour tout x , et

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) f(y)$ et $\det(f(x)) \neq 0$.

b) Dans (ii), peut-on remplacer l'hypothèse $\det(f(x)) \neq 0$ pour tout x par l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(f(x_0)) \neq 0$?

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1373  X 2017, Mines 2022 et 2023

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x^3 + y^3)$. Déterminer $g(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 1374 

Soit $\varphi : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

a) Montrer que φ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.

b) Même question en $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 1375 

a) Montrer que l'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Calculer la différentielle du déterminant.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Déterminer a_1 en fonction de la comatrice de A .

Exercice 1376  Centrale 2013

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. b) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.

c) L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 1377  Ens 2017

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

On suppose que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq a N(x - y)^2$.

Montrer que : $\lim_{N(x) \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 1378  Mines 2023

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

$$\forall (x, y, t) \in E^2 \times [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{t(1-t)}{2} \|x - y\|^2.$$

a) Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x) - \frac{1}{2} \|x - y\|^2$.

b) Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \|x - y\|^2$.

Exercice 1379*X 2013*

Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est lipschitzienne sur toute boule de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1380*Centrale 2017*

Soit $\Phi : (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto (y/x, xy) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que Φ est bijective. Déterminer Φ^{-1} .

b) Montrer que Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$.

c) Résoudre $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 1381*X 2015*

Montrer que $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ est un ouvert et résoudre sur $U : x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

Exercice 1382*Centrale 2010, X 2014, Ens 2016, Mines 2022 et 2023 et 2025*

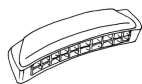
a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $u : x \mapsto f(x, x)$ et $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$. Calculer u' . Calculer la différentielle de g en (a, b) .

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit que f est α -homogène si et seulement si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$. Montrer que f est α -homogène si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f.$$

c) Déterminer les $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (z - y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial f}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

**Exercice 1383** *Centrale 2018*

Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on dit que $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$ est *harmonique* si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

a) Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Déterminer les conditions sur g pour que $f : (x, y) \mapsto g(x^2 + y^2)$ soit harmonique sur Ω .

b) Soient φ et ψ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(x) \psi(y)$. Déterminer les conditions sur φ et ψ pour que f soit harmonique sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $f(0, 0) = 0$.

Exercice 1384 *Exercice destructeur²**: Centrale 2009, X 2009, X 2010, Centrale 2017*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Montrer que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(r) = \int_0^{2\pi} f(a + r \cos t, b + r \sin t) dt$ est constante.

Exercice 1385*Ens 2023*

Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

- a) Donner un exemple de telles fonctions u et v .
- b) On suppose que u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\Delta u = \Delta v = 0$.
- c) Montrer que, pour tout $r > 0$, $u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta$.
- d) Soit V un ouvert contenant $(0, 0)$. Soit u de classe $\mathcal{C}^2$ sur V telle que $\Delta u = 0$ sur V . On admet que sous ces conditions, l'égalité de c) est encore valable pour $r > 0$ suffisamment petit.
- On note D le disque unité ouvert et C le cercle unité.
- Soit g une fonction continue sur D et f une fonction continue sur C .
- Montrer qu'il existe au plus une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité fermé, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et telle que $\Delta u = g$ sur D et $u = f$ sur C .
-

Exercice 1386



Centrale 2018

Soient $h : (u, v) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, v \right)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y\}$.

On considère l'équation aux dérivées partielles $(E) : (2x - y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0$.

- a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ sur D .
- b) Montrer que h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$.
- c) Résoudre (E) sur D en effectuant le changement de variable $(x, y) = h(u, v)$.
-

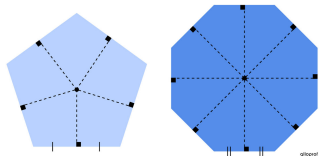
Exercice 1387



X 2025

Soit $n \geq 2$. On pose $\Sigma = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \right\}$.

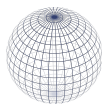
Maximiser $S_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$ lorsque $(a_1, \dots, a_n)$ décrit Σ .



Exercice 1388

Ens 2023

Montrer qu'un polygone convexe à n sommets inscrit dans le cercle unité est d'aire maximale si et seulement si le polygone est régulier.



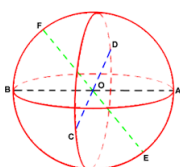
Exercice 1389

X 2019, Centrale 2024

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose que $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} > 0$ sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.

Montrer que le maximum de f sur la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 est atteint sur la sphère de centre 0 et de rayon 1.



Exercice 1390

Mines 2022 et 2023

Soit E un espace euclidien de dimension ≥ 2 . On note B (resp. S) la boule unité fermée (resp. la sphère

unité) de E .

$$\text{Soit } \mathcal{A} = \left\{ \frac{\|u+v\| + \|u-v\|}{\max(\|u\|, \|v\|)} ; (u, v) \in (E \setminus \{0\})^2 \right\}$$

- a) Montrer que $\mathcal{A} = \{\|u+v\| + \|u-v\| ; (u, v) \in S \times B\}$.
- b) Montrer que $\mathcal{A} = \{|1+z| + |1-z| ; z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.
- c) On pose $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |1+x+iy| + |1-x-iy|$. Déterminer l'ensemble Ω des points où f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chaque variable.
- d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .
- e) Déterminer les points critiques de f dans la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne standard).
- f) Conclure en explicitant l'ensemble $\mathcal{A}$.

LES AUTRES

Exercice 1391



Mines 2023

Soient $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x-y| < z < x+y\}$ et $f : (x, y, z) \in \Omega \mapsto \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}\right)$.

- a) Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$.
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

Exercice 1392



Centrale 2019

Soit $f : (x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

- a) Déterminer le domaine de définition D de f .
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- c) Simplifier l'expression de f .

Exercice 1393



Ens 2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour $p \in E$, $I(p) = \int_0^1 \sqrt{1+p'^2}$. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E .

Exercice 1394



Mines 2019

Etude (continuité, classe $\mathcal{C}^1$, extrema) de $f(x, y)$ définie sur $[0, 1]^2$ par :
 $f(x, y) = x(1-y)$ si $x \leq y$ et $f(x, y) = y(1-x)$ si $y \leq x$.

Exercice 1395



Centrale 2022

a) Déterminer le domaine de définition de $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{x^n + y^n}$.

b) Montrer que $\psi : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.

c) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser.

Exercice 1396



Centrale 2018

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

- a) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.
- b) Déterminer les extrema de f .

Exercice 1397

Soit $f : U \rightarrow V$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{42}$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^q$. On suppose que f est différentiable en a et que f admet une fonction réciproque g , différentiable au point $b = f(a)$. Montrer que $q = 42$.

Exercice 1398 *Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ Centrale 2021*

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto f(z)$ que l'on écrit de la manière suivante : $x + iy \mapsto X(x, y) + iY(x, y)$ où X et Y sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si le quotient $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ admet une limite quand $h \rightarrow 0$ dans $\mathbb{C}^*$ (on dit alors que f est holomorphe).

1. Montrer que f est dérivable en z_0 si et seulement si $\frac{\partial X}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Y}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial X}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Y}{\partial x}(z_0)$ (conditions de Cauchy).
 2. Les fonctions suivantes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont-elles dérivables ?
 $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.
-

Exercice 1399 *Mines 2025*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ montrer : $f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c) = \int_a^b g(x) dx$

où $g : x \mapsto \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dy$.

b) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, |f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0)| \leq M|xy|$$

Exercice 1400 *X 2012*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées partielles sont bornées par 1.

Montrer : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|_2$.

Exercice 1401 *Ens 2017*

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leq x \leq y$.

Montrer que $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))| \leq \frac{1}{2} \int_x^y (\|\varphi'(t)\|^2 + \|\nabla f(\varphi(t))\|^2) dt$.

À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 1402 *Ens 2012*

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien canonique. Soit $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

a) On suppose qu'il existe x et b dans $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall y \in \mathbb{R}^n, (b - a(y)|x - y) \geq 0$. Montrer que $b = a(x)$.

b) On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$ et : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, (a(x) - a(y)|x - y) \geq 0$.

On note $J_a(x)$ la jacobienne de a en x . Montrer que $J_a(x) + J_a(x)^T$ est symétrique et positive.

**Exercice 1403***Le théorème de Rolle dans l'espace*

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et B la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S . Etablir l'existence de $x_0 \in B$ tel que $df_{x_0} = 0$.

**Exercice 1404***X 2016*

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a \sin(y), y + b \sin(x))$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire que f soit bijective et telle que, $df_{(x,y)}$ soit un automorphisme en tout point.

**Exercice 1405***X 2011*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f est bijective.

**Exercice 1406***X 2024*

Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in \text{SO}_4(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(A)$.

**Exercice 1407***Centrale 2024*

Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. Soit $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2, P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$. Montrer que Σ admet un minimum et le déterminer.

**Exercice 1408***Mines 2023*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

- Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 1$.
 - Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
 - Déterminer l'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 - Montrer que f admet un unique maximum local et un unique minimum local sur $\mathbb{R}^2$.
-

**Exercice 1409***Mines 2025*

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une forme linéaire sur E .

Montrer que l'application $g : x \in E \mapsto f(x) e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis déterminer ce maximum et ce minimum.

**Exercice 1410***Centrale 2021*

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$.

- La fonction f admet-elle un maximum global ?
 - La fonction f admet-elle un minimum global ?
 - Mêmes questions sur la restriction de f à $[1, 3]^2$.
-

**Exercice 1411***Centrale 2018 et 2025*

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y)^3 + 6xy$. Étudier l'existence d'extrema globaux et locaux pour f sur $\mathbb{R}^2$, puis sur le disque unité.

Exercice 1412*Ens 2024*

Montrer que la fonction $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) = \int_0^1 (P(x) - e^x)^2 dx$ admet un unique point critique.

Exercice 1413*X 2008*

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on considère la sphère unité S .

Extrema de $\varphi : (x, y, z) \in S^3 \mapsto (x|y) + (y|z) + (z|x)$?

Exercice 1414*Centrale 2013*

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

a) soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (a|x)$. Déterminer le gradient de φ .

b) soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que f possède un minimum.

c) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que $x \mapsto \nabla f$ est surjective.

Exercice 1415*Centrale 2024 et 2025*

Soit $n \geq 2$. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \langle X, AX - Y \rangle$.

a) On suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que Φ a un unique point critique et

déterminer si Φ admet un extremum local en celui-ci.

b) On revient au cas général. Montrer que $\Phi(X) \xrightarrow{\|X\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Montrer que Φ admet un minimum et que celui-ci est atteint en un unique point.

Exercice 1416*X 2020*

On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), Y \in \mathbb{R}^p$ fixé.

Soit $\varphi : X \mapsto \|AX - Y\|^2$.

a) Montrer que φ admet un minimum local en X_0 si et seulement si $A^T(AX_0 - Y) = 0$.

b) Montrer que φ admet un minimum en un unique point si et seulement si A est injective.

**Exercice 1417***Mines 2017*

Soit $U = \{(x, y) \in]-\pi/2, \pi/2[^2 ; x < 0, y > 0, y - x > \pi/2\}$ et $f : (x, y) \mapsto \tan(y) - \tan(x) + \tan(x - y)$.

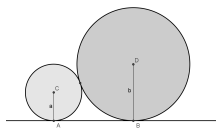
a) Montrer que f admet un minimum sur U .

b) Soit C un disque du plan. Trouver les triangles contenant C et d'aire minimale

Exercice 1418*Mines 2011*

Soient ABC un vrai triangle et T son intérieur.

Déterminer le maximum de $F : M \mapsto d(M, (AB)) \times d(M, (BC)) \times d(M, (AC))$ sur T .



Exercice 1419

Soient C et C' deux cercles de rayons R et R' tangents en A . Comment positionner M sur C et M' sur C' pour maximiser l'aire du triangle AMM' ?

Exercice 1420



Mines 2023

a)) Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[\times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que

$$x(x-1)\frac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x^2 f = 0.$$

Ind. Effectuer le changement de variables $x = u$ et $y = uv$.

b)) Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts, $f_i : x \mapsto \exp(a_i x)$ pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

c)) Le sous-espace vectoriel des solutions obtenu dans la première question est-il de dimension finie ?

Exercice 1421



Centrale 2017

Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > |y|\}$ et $f : (x, y) \in \Omega \mapsto \int_0^\pi \ln(x + y \cos(t)) dt$.

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

b) Calculer ∇f en tout point de Ω . c) Calculer $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 1422



X 2024

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

On suppose que $\nabla(\Omega)(0) = 0$ et on note $D_a^2(\Omega)$ la hessienne en a de Ω .

On suppose que $\text{Im}(D_a^2(\Omega)) = F$, où F est indépendant de a et de rang p .

Montrer qu'il existe un changement de coordonnées f (c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$) tel que, pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\Omega \circ f)(x_1, \dots, x_d)$ ne dépende que de $(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 1423



Ens 2023

On considère $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, où X et Y indépendantes avec X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{G}(p)$.

a) Déterminer la probabilité que M soit inversible.

b) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable. Dans ce cas, préciser spectre et espaces propres.

c) Déterminer la probabilité que $M^8 = I_2$.

d) Déterminer la probabilité qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ admettant un minimum local strict en $(0, 0)$ et dont la matrice Hessienne en $(0, 0)$ est M .



Exercice 1424

Centrale PSI 2023

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

a) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ on note $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer φ'' en fonction de la matrice Hessienne de f .

b) En considérant la fonction $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \frac{t^2}{2} x^T x$, montrer l'inégalité

$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^T x.$$

c) En déduire que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.



Exercice 1425

Soient $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

Déterminer la Hessienne de f en fonction de celle de g .



Exercice 1426

a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction affine. Montrer que J_φ est constante.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que

$$H_{f \circ \varphi}(a, b) = J_\varphi^T \times H_f(\varphi(a, b)) \times J_\varphi$$



Exercice 1427 *Inégalités de Taylor-Lagrange*

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall a \in U, \|H_f(a)\|_\infty \leq M$.

a) Montrer que $\forall (A, B) \in U^2, |f(B) - f(A) - df_A(\vec{AB})| \leq \frac{M \|\vec{AB}\|_1^2}{2}$.

b) Montrer que $\forall (A, B) \in U^2, |f(B) - f(A) - df_C(\vec{AB})| \leq \frac{M \|\vec{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A, B]$.



Exercice 1428 *Mines 2019*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On note $g(u, v) = f(x, y)$ où $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \neq \beta$.

a) Déterminer une équation aux dérivées partielles (E) vérifiée par g .

b) Préciser à quelle condition sur (a, b, c) , il existe (α, β) pour lequel g vérifie l'une des équations aux dérivées partielles suivantes :

i) $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, ii) $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, iii) $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

Exercice 1429*X 2024*

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, c'est-à-dire telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(u + vt)$ est convexe. Montrer que f est continue.

Exercice 1430*Exercice vibrant*

On appelle équation des cordes vibrantes $(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

- a) A l'aide du changement de variable $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$ donner l'ensemble des solutions $\mathcal{C}^2$ de (E) .
- b) En déduire les solutions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - c^2 t^2}}$

Exercice 1431*Centrale 2010*

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si φ admet un maximum local en $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\varphi''(a) \leq 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \Gamma, f(x, y) = 0$.

On pose, pour $(x, y) \in D$, $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

- (a) On suppose $\Delta f > 0$ sur D . Montrer que $\forall (x, y) \in D, f(x, y) < 0$.
- (b) On suppose $\Delta f \geq 0$ sur D . Montrer que $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq 0$.

☛ Considérer $f_\varepsilon : (x, y) \mapsto f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$ avec $\varepsilon > 0$.

**Exercice 1432***Centrale 2022*

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ telles que $\varphi : (x, y, z) \in (\mathbb{R}^*)^3 \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$ soit de laplacien nul.

**Exercice 1433***Mines 2021*

Soient $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à R .

Montrer (i) $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \Delta(f \circ r) = (\Delta f) \circ r \iff$ (ii) $R \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1434*X 2015 et 2017*

Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+}, \mathbb{R})$, n un entier supérieur ou égal à 2, et f l'application définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ par l'égalité $f(X) = g(\|X\|^2)$. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 1435*Centrale MP 2023*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

- a) Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F . Justifier la formule.
- b) On définit la fonction $d_F : E \setminus F \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 1436*X 2012*

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui à P associe $P^t P$.

- a) Si M appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que la différentielle de f en M est surjective.
- b) Soit g la restriction de f à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle toujours surjective ?

Exercice 1437*Centrale 2018*

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$.

- a) Montrer qu'il existe $e_1 \in S$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(x) \leq f(e_1)$.
- b) Calculer le gradient de f en e_1 de deux manières différentes.



- c) En déduire que e_1 est un vecteur propre de A . d) En déduire le théorème spectral.

Exercice 1438*Centrale 2025*

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les disques fermés de centres ω_1 et ω_2 et de rayons $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$.

On pose $f : (u_1, u_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \mapsto |\det_\varepsilon(u_1, u_2)|$.

- a) Montrer que f admet un maximum.
- b) Soit (v_1, v_2) un point où f atteint son maximum. Pour $i \in \{1, 2\}$, montrer que v_i appartient au cercle de centre ω_i et de rayon r_i .

Exercice 1439*Centrale 2025*

- a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On écrit $z = x + iy = re^{i\theta}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Montrer que $\theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$. La formule $\theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$ est-elle valable ?

- b) On note $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbb{R}^-\}$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D telles que, pour tout $u \in D, \langle u, \nabla(f)(u) \rangle = \frac{1}{\|u\|}$ pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1440*Centrale 2025*

On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

Soit $K : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $U : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) f(y) dy$.

- a) Montrer que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t)$.
- b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, U(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} f(x)$.

Exercice 1441 *X 2014*

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R}^2)$.

On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t \mapsto \|f(t)\|$ soit croissante sur $[0, \varepsilon]$.

Exercice 1442 *X 2024*

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^N$ qui tend vers 0 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - \varphi_n$ admette un minimum local en x_n .

Exercice 1443 *Mines 2022*

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \geq \|x\|$ (pour la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 1444 *Ens 2023*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$(*) \quad : \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \text{ et } f(0, x) = P(x).$$

a) Montrer qu'il existe une solution de $(*)$ polynomiale en x .

b) On suppose P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Soit f une solution de $(*)$ polynomiale en x . Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, $x \mapsto f(t, x)$ est aussi scindé à racines simples.

Exercice 1445 *X 2022*

Soit ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur à ABC .

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est indépendante du choix du point M .

Exercice 1446 *Centrale 2022*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(X) = 1\}$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $M \mapsto \|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.

On note $f(M) = \|M\|^2$ et $g(M) = \det(M) - 1$.

a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que f atteint un minimum global sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

b) Calculer ∇f .

c) On cherche explicitement ce minimum. Soit M_0 une matrice où ce minimum est atteint. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Construire une fonction $\gamma : I \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, I étant un intervalle réel entourant 0, telle que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.

d) On admet que $\nabla g(M) = (M^T)^{-1}$. En déduire que M_0 est orthogonale directe. Étudier la réciproque.
