

« Gott würfelt nicht », *Albert Einstein, 1927*

LES BASIQUES

**Exercice 1237***Mines 2023 et 2024*

Une rose est offerte. On note X le temps de vie de cette rose (en jours), c'est-à-dire le temps pendant lequel elle ne fane pas. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la rose n'est pas fanée le jour n , calculer le nombre moyen de jours qu'il lui reste avant de faner.

**Exercice 1238** Montrer, grâce à l'inégalité bienaimée

de Tchebyshev, que $\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} 2^{4n}$.

**Exercice 1239***Mines 2023*

On considère le lancer de deux dés équilibrés. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales au résultat des lancers, et on suppose X_1 et X_2 indépendantes. On note $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

- Déterminer la loi de X . Calculer son espérance. En déduire la loi de Y .
- Simplifier XY . En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

**Exercice 1240***Mines 2023*

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur $\mathbb{N}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y) \neq 0$.

Prouver que $X + Y$ et $X - Y$ ne sont pas indépendantes.

Etudier la même question avec $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$.

**Exercice 1241***Ens 2023*

On retourne une par une les cartes d'un jeu de 52 cartes. Trouver l'espérance du nombre de cartes retournées avant d'obtenir le premier as (on demande un raisonnement intuitif sans calcul de la loi).

**Exercice 1242***Ens 2023*

Existe-t-il des variables aléatoires X, Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Y \sim \mathcal{P}(p)$ et telles que l'on ait $\mathbf{P}(X = Y) = 1 - p + pe^{-p}$?

1. mais discrets...

Exercice 1243*Ens 2023*

On considère X de loi $\mathcal{B}(p)$ et Y de loi $\mathcal{P}(p)$ avec $p \in [0, 1]$. Majorer $\mathbf{P}(X = Y)$ et trouver des variables X et Y pour lesquelles cette majoration est atteinte.

Exercice 1244*X 2022*

Alice a oublié son mot de passe, elle sait qu'il est de taille p . Il existe en tout n caractères différents. Sachant qu'Alice ne va pas réessayer un mot de passe qu'elle a déjà tapé, quelle est l'espérance du nombre de tentatives nécessaires pour trouver son mot de passe.

Exercice 1245*X 2015, Mines 2022*

On effectue des tirages successifs et indépendants d'une pièce équilibrée.

Soit X_n le nombre de face obtenus lors des n premiers lancers.

Déterminer n tel que : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{100}\right) \geq 0,99$.

Exercice 1246*Mines 2019***PC*2****SPOIR**

Pendant les vacances de février, un(e) élève de **SPOIR** descend une liste de n exercices les uns après les autres.

Pour chaque exercice, il/elle a une probabilité p de le résoudre.

Les exos sont résolus indépendamment les uns des autres.

Soit X_1 le nombre d'exos résolus.

Il/elle reprend ensuite les $n - X_1$ exercices non résolus la première fois : à nouveau, son taux de résolution est de p lors de la deuxième tentative.

Soit X_2 le nombre d'exercices résolus lors de la deuxième tentative.

L'élève recommence jusqu'à ce qu'il ait résolu les n exercices.

On note X_k le nombre d'exercices résolus lors de la k -ième tentative.

Déterminer la loi de X_1 , la loi de $X_1 + X_2$, la loi de $X_1 + \dots + X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Application numérique : $n = 1308$ et $p = 0,8$ (pfi) : calculer le nombre moyen de fois où il/elle devra reprendre les exercices pour tous les résoudre.

Exercice 1247*Ens 2016*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n^2) \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. A t-on toujours $P(|X_1 + \dots + X_n| \geq n\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 1248*X 2018*

Soit X un ensemble de cardinal fini et A un sous ensemble de X .

On note $p = \frac{\text{card } A}{\text{card } X}$.

Soit $n \geq 1$. On effectue n tirages d'éléments de X indépendants et avec remise.

On note $(X_1, \dots, X_n)$ les éléments tirés lors de l'expérience et $S = \frac{1}{n} \times \text{card}(i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \in A)$.

Soit r un réel, montrer que $\mathbb{P}(|S - p| \leq r) \geq 1 - \frac{1}{4rn^2}$.

Exercice 1249



X 2017

Soit X une variable aléatoire strictement positive. Montrer que $\mathbb{E} \left(X + \frac{1}{X} \right) \geq 2$.

Exercice 1250



Mines 2022 et 2023

Soit $\alpha > 0$.

a) Montrer l'existence d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X telle que $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$.

b) Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$.

c) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1251



Centrale 2015, Mines 2019, X 2015, 2019, 2021, Ens 2022

Soit Ω l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ muni de l'équiprobabilité et X le nombre de points fixes d'une permutation $\omega \in \Omega$. Quelle est l'espérance et la variance de X ?

Exercice 1252



Au rez-de-chaussée d'un building de n étages, m personnes montent dans l'ascenseur. Quelle est l'espérance du nombre d'arrêts ?

Exercice 1253



X 2015, Centrale 2021 On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

On s'intéresse au temps d'apparition du motif Face-Pile, modélisé par une variable aléatoire X (on a $X = n$ lorsque on a obtenu Face au $(n-1)$ -ième lancer et Pile au n -ième, et que le motif Face-Pile n'est pas apparu avant).

De même, on modélise le temps d'apparition du motif Pile-Pile par une variable aléatoire Y .

Déterminer la loi de X et celle de Y .

Exercice 1254



Mines 2016

Soient p un entier supérieur ou égal à 2, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables *i.i.d.* de loi uniforme sur $\llbracket 1, p \rrbracket$. On pose $M_n = \max\{U_1, \dots, U_n\}$. Déterminer la loi de M_n et la limite de la suite $(\mathbb{E}(M_n))_{n \geq 1}$.

**Exercice 1255***Centrale 2016*

Trois clients arrivent dans une banque disposant de deux guichets. Les clients C_1 et C_2 vont aux deux guichets, le client C_3 va dans le premier guichet libéré. Le temps passé au guichet par le client C_i suit une loi géométrique de paramètre p . Déterminer la probabilité que le client C_3 termine le dernier.

**Exercice 1256***Mines 2015 et 2017, Centrale 2024*

Une puce se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ en partant de 0. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité qu'elle fasse un saut à droite, $q = 1 - p$ la probabilité qu'elle fasse un saut à gauche. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse au bout de n déplacements. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

**Exercice 1257***Ens 2016 et 2019, Mines 2017, X 2018, Centrale 2024*

Soient $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Rademacher, i.e. telles que $P(A_{i,j} = -1) = P(A_{i,j} = 1) = 1/2$. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ la matrice aléatoire.

- Calculer $E(\text{tr}(A^k))$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Calculer $E(\det A)$ et $V(\det A)$.

**Exercice 1258***Mines 2015 et 2024*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ le tirage infini de Bernoulli et $r \geq 1$ un entier strictement positif fixé. On définit sur Ω une variable aléatoire discrète T_r à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui associe à ω le rang du r -ième 1 de ω s'il existe, et $+\infty$ s'il n'y a pas plus de $r - 1$ indices n tels que $\omega_n = 1$. Par exemple, pour $r = 1$, $T_1(\omega)$ est le rang d'apparition du premier 1 de la suite ω .

Ainsi, $T_1(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots) = 3$ et $T_2(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots) = 6$. Il s'agit bien d'une v.a.d.

- Déterminer la loi de T_r .
- Déterminer son espérance, sa variance.
- Montrer que si S_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (étendue à $\mathbb{N}$) alors $\mathbb{P}(T_r \leq k + r) = \mathbb{P}(S_{k+r} \geq r)$.

**Exercice 1259***Ens 2016, Mines 2018, X 2018 et 2019, Centrale 2022*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_1 + \dots + X_n$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute partie bornée A de $\mathbb{R}$, la série $\sum \mathbb{P}(Y_n \in A)$ converge.

**Exercice 1260***X 2018 : Théorème de Weierstrass, Ens 2019, Mines 2022*

- Soit f une fonction continue définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, soit n un entier naturel non nul, et soit $x \in [0, 1]$.

On pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynômes de Bernstein).

- Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

- Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

ii. Soit la variable aléatoire $f(\frac{S_n}{n})$, montrer que son espérance vérifie : $\mathbb{E}\left(f(\frac{S_n}{n})\right) = B_n(f)(x)$

(b) Montrer que si f est continue sur un segment, alors f est uniformément continue.

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On pose
$$\begin{cases} I_1 = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha \\ I_2 = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| > \alpha \end{cases}$$

i. Montrer que $\left| \sum_{k \in I_2} \left(f(\frac{k}{n}) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| \leq 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

ii. Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$

2. En déduire le théorème de **Weierstrass**

Exercice 1261



X 2019, 2023, Ens 2022

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. réelles mutuellement indépendantes.

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$.

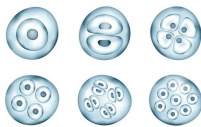
b) On suppose que, pour tout k , X_k est de la forme $a_k Y_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ et Y_k une v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y_k = -1) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{2}$, les $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant une famille de v.a. mutuellement indépendantes.

(i) Calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$.

(ii) On pose $\sigma_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) \leq \exp(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2})$.

(iii) En déduire que $\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2})$

c) On lance une pièce équilibrée un million de fois. Majorer la probabilité d'obtenir au moins 510 000 fois pile.



Exercice 1262

X 2024

On étudie un groupe de cellules. À l'instant initial, $n = 0$, il y en a une. À chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.



Exercice 1263

Mines 2018, 2019, 2021, 2022, 2024

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbf{P}(T = n | T \geq n)$. On dit que (θ_n) est un taux de pannes.

a) Montrer que les θ_n sont dans $[0, 1[$.

b) Exprimer $\mathbf{P}(T \geq n)$ en fonction des θ_k . Montrer que la série $\sum \theta_n$ diverge.

c) Réciproquement, si (θ_n) est une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge, montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$ et $\mathbf{P}(T = n | T \geq n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1264

X 2017, Ens 2018

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit que X est symétrique si $X \sim -X$.

- Soient X_1, X_2 des variables symétriques. A-t-on forcément $(X_1, X_2) \sim (X_1, -X_2)$?
- Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, symétriques, à valeurs réelles. On pose, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$.
Si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, montrer que $(S_1, \dots, S_k, S_n) \sim (S_1, \dots, S_k, 2S_k - S_n)$.

Exercice 1265

Mines 2016 et 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_n, Y_n suivant la loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$.

- Calculer l'espérance E_n et la variance V_n de $Z_n := |X_n - Y_n|$.
- Déterminer la limite de chaque suite (E_n) et (V_n) .

**Exercice 1266**

Centrale 2024

Un chocolatier met des images dans ses tablettes de chocolat. Il y a N images différentes et, à chaque achat, on obtient uniformément et indépendamment une des images. Soit X_k le nombre de tablettes achetées pour obtenir k images différentes.

- Quelle est la loi de $X_{k+1} - X_k$? Calculer $\mathbf{E}(X_k)$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{E}(X_N)$ quand N tend vers l'infini.
- Trouver de même un équivalent de $\sigma(X_N)$.

LES AUTRES

**Exercice 1267**

Centrale 2024

Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , on pioche n boules avec $n \leq N$ (en une seule fois). On note X la variable aléatoire qui donne le maximum des numéros des boules tirées.

- Donner la loi de X .
- Montrer que $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.
- En déduire l'espérance de X .
- Déterminer la variance de X .

**Exercice 1268**

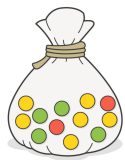
Mines 2024

Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n . On tire des boules, une à une, avec remise, tant que le numéro de la boule tirée est supérieur au précédent. On note Z le nombre de boules tirées. Déterminer la loi de Z .


Exercice 1269
Mines 2024

Soient $a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = an$. On dispose de N boules indiscernables et n urnes numérotées de 1 à n . On dépose les N boules dans les urnes. On note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i est vide, et 0 sinon. On note Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = \frac{1}{n}Y_n$.

a) Donner la loi de T_i . Calculer l'espérance et la variance de T_i . b) Calculer l'espérance et la variance de S_n . Étudier les limites de $(\mathbf{E}(S_n))$ et $(\mathbf{V}(S_n))$.


Exercice 1270
Centrale 2021

On suppose que $N \geq 1$ boules sont réparties entre deux urnes U_1 et U_2 .

On tire au hasard un entier $p \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Si p est inférieur ou égal au nombre de boules de l'urne U_1 , on transfère une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 . Sinon, on transfère une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 .

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 à la $n^{\text{ème}}$ étape. On pose $Y_n = (\mathbb{P}(X_n = 0), \dots, \mathbb{P}(X_n = N))^T$.

a) Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = AY_n$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A .

c) Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n)$ et en déduire l'espérance de X_n .


Exercice 1271
Ens 2024

On considère une urne vide qu'on remplit successivement d'une boule blanche (avec une probabilité p) ou d'une boule rouge (avec une probabilité $1 - p$). On arrête de la remplir lorsqu'on obtient la première boule rouge. Puis on la vide jusqu'à tirer la boule rouge.

Déterminer le nombre moyen de boules blanches restantes à la fin.


Exercice 1272
X 2018

On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes.

On suppose que $r \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ personnes décèdent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.


Exercice 1273
X 2019, Centrale 2022

On lance un dé à six faces jusqu'à ce qu'on obtienne un 6. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus aux différents lancers soit paire ?

**Exercice 1274***X 2016*

Cinq compères sont autour d'une table ronde. Deux voisins ont chacun un ballon. À chaque tour, une personne ayant un ballon le donne à son voisin de gauche ou à son voisin de droite avec une probabilité égale à $1/2$. Déterminer le nombre moyen de tours nécessaires pour qu'une personne ait les deux ballons. *Ind.* On pourra considérer la distance $d_n \in \{0, 1, 2\}$ entre les deux ballons.

**Exercice 1275***Mines 2024*

Dans un magasin, on a n caisses et np clients. Chaque client choisit une caisse de façon indépendante et avec la même probabilité pour chacune des caisses. On note X_i le nombre de clients à la caisse numéro i .

- En écrivant X_i comme une somme de variables aléatoires indépendantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i .
- Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

**Exercice 1276***Mines 2018*

On dispose de p boules que l'on place aléatoirement dans n tiroirs $T_1, \dots, T_n$.

- Déterminer la loi du nombre X_k de boules situées dans T_k .
- Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes?
- Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs vides. Déterminer l'espérance de Y .

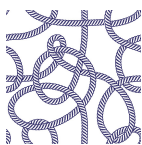
PC*2**SPOIR**

Exercice 1277 Deux élèves de **SPOIR** : Spoirwoman et Spoirman s'attaquent à n exercices de la feuille d'exercices variables et aléatoires (mais discrets) pour passer au tableau en TD. Chaque exercice est, de manière indépendante et équiprobable, soit résolu magistralement au tableau par Spoirwoman, soit résolu par Spoirman ou n'est pas résolu.

On note X : le nombre d'exercices résolu² par Spoirwoman et Z le nombre d'élèves (parmi Spoirwoman et Spoirman) n'étant pas passé au tableau.

Déterminer la loi conjointe de (X, Z) .

En déduire la loi de Z .

**Exercice 1278***X 2017*

Un sac contient N cordes. À la première étape on choisit au hasard deux extrémités de cordes et on les noue. On dit qu'on a une boucle si on a noué les extrémités de la même corde.

- Déterminer l'espérance du nombre X de boucles après la première étape.
- On réitère N fois l'opération en nouant à chaque fois deux extrémités libres. On note Y le nombre de boucles. Déterminer l'espérance de Y .

Exercice 1279

Mines 2015 et 2017

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U_0, \dots, U_p$ des urnes, l'urne U_k contenant k boules blanches et $p - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, on tire $n \in \mathbb{N}^*$ boules avec remise et on note N_p le nombre de boules blanches tirées.

a) Déterminer la loi de N_p et l'espérance de N_p .

b) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que $P(N_p = k) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$.

c) En déduire la limite en loi de $(N_p)_{p \geq 1}$.

Exercice 1280

X 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul à coefficients positifs ou nuls. On pose $f : x \mapsto \exp(P(x))$.

a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence $+\infty$.

b) On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que les b_n sont positifs ou nuls.

c) Pour $x > 0$, soit X_x la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbb{P}(X_x = n) = \frac{b_n x^n}{f(x)}$.

Soit $x > 0$. Exprimer $\mathbb{E}(X_x)$ et $\mathbb{V}(X_x)$ à l'aide de P .

d) Soit $d \in \mathbb{R}^+$ tel que $2d > \deg(P)$. On pose, pour $x > 0$, $I_x = \{n \in \mathbb{N}, |n - x P'(x)| \geq x^d\}$. Soit $g_d : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \sum_{n \in I_x} b_n x^n$. Montrer que $g_d(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x))$.

**Exercice 1281**

X 2016

Soit μ une variable aléatoire telle que $P(\mu = 0) = P(\mu = 1) = P(\mu = 2) = 1/3$. On note Z_n le cardinal d'une population d'individus à l'instant n . On suppose que $Z_0 = 1$ et que, à l'étape n , un individu a un nombre de descendants suivant la loi de μ puis meurt.

a) Déterminer Z_1 et Z_2 .

b) Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$. On pose : $E(Z_{n+1} \mid Z_n = N) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = N)$. Montrer que

$$E(Z_{n+1} \mid Z_n = N) = N.$$

c) On note $\varphi(t)$ la fonction génératrice de μ . On admet que la fonction génératrice de Z_n est $G_{Z_n} : t \mapsto \varphi \circ \dots \circ \varphi(t)$ (composée n fois). Déterminer la probabilité d'extinction de la population.

**Exercice 1282**

X 2016

Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $a + b = 1$.

a) Montrer que la série de terme général $\binom{2n}{n} a^n b^n$ diverge si et seulement si $a = b = 1/2$.

On se place sur l'axe $\mathbb{Z}$ initialement en 0. On a une probabilité a d'aller à droite, b d'aller à gauche à chaque instant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

p_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n . On pose $R : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et

$$P : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n.$$

- b) Montrer que P et R sont définies sur $] - 1, 1[$.
 c) Montrer, pour $t \in] - 1, 1[$, $R(t) = 1 + R(t)P(t)$.
 d) Montrer que la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si $a = b$.

Exercice 1283



Loi binomiale négative

On souhaite étudier le temps d'attente du m -ème succès dans une série d'expériences aléatoires indépendantes ayant une même probabilité $p \in [0, 1]$ de réussite. On note $(X_n)_{n \geq 1}$ la suite de variables de Bernoulli modélisant la succession des expériences. Le temps d'attente du m -ème succès définit une variable aléatoire T_m déterminée par

$$T_m = n \iff X_1 + \dots + X_n = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{n-1} < m$$

- a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de T_1 .
 b) Même question avec $T_m - T_{m-1}$ pour $m \geq 2$.
 c) Déterminer la fonction génératrice de T_m puis la loi de T_m .



Exercice 1284

Mines 2016

Soit N le nombre d'appels arrivant un certain jour chez *Bolzano's Pizza*³. Soit X_i le nombre de pizzas commandées lors du i -ème appel et Y le nombre total de pizza commandées ce jour-là.

- a) Montrer que $G_Y = G_N \circ G_X$. b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$.
 c) On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Quel est la loi de Y lorsque $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$?



Exercice 1285

Ens 2019

On considère des voitures de longueur 2 et un parc de stationnement à n places symbolisé par $\{1, 2, \dots, n\}$.

À chaque fois qu'une voiture arrive, on tire au hasard un nombre entre 1 et $n - 1$ et la voiture se gare (si possible) sur les emplacements $i, i + 1$. On continue jusqu'à ce qu'aucune voiture ne puisse se garer. Donner une estimation asymptotique du nombre d'emplacements libres à l'issue de ce processus quand n tend vers $+\infty$.



Exercice 1286

Centrale 2015

Soit X une variable aléatoire. On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z telles que $Y + Z$ ait la même loi que X .

- a) Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z .
 b) Soient $n \geq 2$ et $p \in]0, 1[$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, montrer que X est décomposable.
 c) Soit $n \geq 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n - 1\}$. Montrer qu'il existe

$$r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ tels que : } \forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} t^i \right) \left(\frac{1}{s} \sum_{j=0}^{s-1} t^j \right).$$

En déduire que X est décomposable.

- d) On suppose que $n \geq 3$ est premier. Soit X suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n - 1\}$. Montrer que X n'est pas décomposable.

3. Bolzano et Weierstrass, voyant leur collaboration fructueuse, décidèrent de s'associer pour ouvrir une pizzeria. Toutefois, ils ne lui donnèrent que le nom de Bolzano, craignant que "Weierstass Pizza" ne soit pas très vendeur...

Exercice 1287

X 2017, 2020, Mines 2023 et 2024

Soient X, Y deux v.a. strictement positives telles que $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim Y$.
Montrer que $\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$. À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 1288

X 2020

Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \geq 2$ et $n \geq 2$, $p \in]0, 1[$. On considère k joueurs. Chacun des joueurs lance au plus n fois une pièce donnant pile avec la probabilité p et s'arrête lorsqu'il obtient pile. Le nombre de points est égal au nombre de face obtenus (il marque n points s'il n'obtient jamais pile).

- Déterminer la loi du nombre de points obtenus par un joueur donné.
 - Le gagnant est celui ou ceux ayant le moins de points. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul gagnant.
-

Exercice 1289

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit $m \in [a, b]$ et X une v.a.r. à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance m . Montrer que $V(X) \leq (b - m)(m - a)$ et que cette inégalité est optimale.

Exercice 1290

X 2021

Soient Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble D , f et g deux fonctions croissantes et bornées de D dans $\mathbb{R}$.

Justifier l'existence de $\text{cov}(f(Y), g(Y))$ et montrer qu'elle est positive.

Exercice 1291

Soient X et Y deux v.a.d. réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, X prenant N valeurs distinctes, et Y prenant M valeurs distinctes. On suppose que, pour toutes fonctions polynomiales f de degré strictement inférieur à N et g de degré strictement inférieur à M , $\text{Cov}(f(X), g(Y)) = 0$.
Montrer que les v.a.d X et Y sont indépendantes.

Exercice 1292

Mines 2024

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1]$.

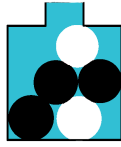
- Soit U une variable aléatoire telle que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la fonction génératrice de U .
 - Soient Y et Z deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $U = Y + Z$ et $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que Y et Z suivent des lois binomiales (pas nécessairement de mêmes paramètres).
-

Exercice 1293

Ens 2023

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère dans le plan un graphe non orienté aléatoire de n sommets. On note $X_{i,j} = 1$ si les points d'indices i et j sont reliés, et 0 sinon. On suppose les $X_{i,j}$ indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. On note T_n le nombre de triangles formés par ces n points. On pose $a_n = \binom{n}{3} p^3$.

Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{T_n}{a_n} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0$.



Exercice 1294 *X et Mines 2015, Centrale 2018* Une urne contient une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches, les autres boules étant noires. On effectue des tirages avec remise. Soient X la variable aléatoire donnant la longueur de la première série de boules d'une même couleur, Y la variable aléatoire donnant la longueur de la deuxième série de boules de la même couleur.

- Donner la loi de (X, Y) .
 - Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
 - Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
 - Déterminer la loi de $X + Y$.
-



Exercice 1295 *Mines 2016, X 2015 et 2017*

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux faces consécutifs dans un jeu de pile ou face, dans lequel la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.



Exercice 1296 *Centrale 2015*

Une urne contient 3 boules numérotées de 1, 2 et 3.

On tire successivement une boule avec remise et on définit X la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel on obtient trois fois de suite la même boule.

Déterminer la loi de X et son espérance.



Exercice 1297 *Ens 2018 et 2024*

Soit Σ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Si $k \in \{2, \dots, n\}$ et si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on dit que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ est une sous-suite strictement croissante de longueur k de σ si $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)$.

On note Y_k le nombre de sous-suites strictement croissantes de longueur k de Σ .

Déterminer l'espérance de Y_k .



Exercice 1298 *X 2015 et 2019*

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit que X est symétrique si $X \sim -X$.

a) Soient Y et Y' deux variables aléatoires telles que $Y \perp\!\!\!\perp Y'$, $Y \sim Y'$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que $Y - Y'$ est symétrique.

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

b) Montrer que $F_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$ définit une fonction sur $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F_X pour que X soit symétrique.

c) On suppose X symétrique. Soit ε une variable indépendante de X telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Montrer que εX et X ont même loi.



Exercice 1299 *Mines 2024*

Soient U une v.a.d, n et ℓ deux entiers naturels tels que $n \geq \ell + 3$ et $\mathbf{P}(U > n) \mathbf{P}(U > \ell) > 0$.

On pose $Y = \left\lfloor \frac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \frac{U+1}{2} \right\rfloor$.

a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.

b) On suppose que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 4$ pair. Montrer que Y ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 1300*Mines 2024*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$.

On suppose que $X \leq Y$, que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = i) > 0, \forall 1 \leq k \leq i, \mathbf{P}(X = k | Y = i) = \frac{1}{i}$.

Montrer que X et $Y - X + 1$ ont la même loi.

Exercice 1301*X 2018 et 2023*

Soient $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 3$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Soit $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $\{0/q, 1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q\}$.

On pose $T_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n + \tau + \sin(2\pi(T_n - \theta_n))$.

Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1302*Mines et Centrale 2024*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

a) Exprimer la loi de Y en fonction de celle de X . Montrer que Y et $X - Y$ suivent la même loi.

b) On pose $Z = Y + 1$ et on suppose que Z suit la loi géométrique de paramètre p .

i) Déterminer la loi de X .

ii) Montrer que les variables aléatoires Y et $X - Y$ sont indépendantes.

c) Réciproquement, montrer que si les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes alors $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique.

Exercice 1303*X 2020*

Soient $N \geq 2$, $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$. On pose

$$M_N = \min\{|X_{i+1} - X_i|, i \in \{1, \dots, N-1\}\}$$

a) Montrer que la suite de terme général $\mathbb{P}(M_N = 0)$ converge et déterminer sa limite.

b) Montrer que la suite de terme général $\mathbb{E}(M_N)$ est bornée.

**Exercice 1304***Centrale 2022*

On dispose de N trous, chacun aussi profond que nécessaire. On jette aléatoirement n balles successivement dans ces trous. Chaque balle a la même probabilité de tomber dans les différents trous, et les lancers sont indépendants. On note T_n la variable aléatoire donnant le nombre de trous contenant au moins une balle.

a) Déterminer les valeurs que prend la variable T_n (en fonction de n et N).

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer en utilisant la formule des probabilités totales que

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N+1-k}{N} \mathbb{P}(T_n = k-1).$$

c) Montrer que T_n possède une espérance, et la calculer.

Exercice 1305*Ens 2021*

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Soit enfin $N = \text{card}\{n \in \mathbb{N}^* ; S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. En déduire $\mathbb{E}(N)$.
 - Montrer que N est presque sûrement égale à $+\infty$.
-

Exercice 1306*Mines 2023*

On dispose d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, U_3, \dots$ telles que l'urne U_n contient n boules noires et une boule blanche. On retire au hasard une boule de l'urne U_1 . Si elle est blanche, on s'arrête. Sinon, on tire une boule au hasard de l'urne U_2 . Si elle est blanche, on s'arrête. Sinon on tire une boule de l'urne U_3 . On poursuit ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche.

Soit X le nombre de tirages faits pour obtenir une boule blanche.

- Déterminer la loi de X .
 - Montrer que $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ a une espérance finie et la calculer.
-

Exercice 1307*Ens 2023*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Montrer que $\mathbf{P}(4 \text{ divise } S_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$.

Exercice 1308*Mines 2021*

a) Soient $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'événements tels que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Écrire l'événement B : « une infinité d'événements A_n sont réalisés » à l'aide d'unions et d'intersections. Montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

Soit X une variable aléatoire réelle centrée ayant un moment d'ordre 4. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X . On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Montrer que $\sum \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}$ converge.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4}$.
- Montrer qu'il existe un événement N de probabilité nulle tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0.$$

Exercice 1309*X 2017*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de X .

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $N_n = \text{Card} \{S_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$.

Soit enfin $A = \bigcap_{j \geq 1} (S_j \neq 0)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(S_{n+1} \notin \{S_0, \dots, S_n\}) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{n+1} \neq 0)$.
- Montrer que $\mathbb{E} \left(\frac{N_n}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A)$.

Exercice 1310 Mines 2015, Centrale 2018

- a) Soit X qui suit une loi géométrique de paramètre p . On pose $Y = \frac{1}{X}$.
b) Donner les valeurs prises par Y et la loi de Y .
c) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(Y^m)$ où $m \in \mathbb{N}^*$.
d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
e) On définit $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$ où $X_1 \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{G}(p_2)$.
f) Calculer la covariance de U et de T .
g) A-t-on $U \perp T$?
-

Exercice 1311 Ens 2017, Mines 2024

- Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre p . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.
a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
b) Exprimer α_n en fonction de n .
c) Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n .
-

Exercice 1312 Mines 2022

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note S la plus grande valeur propre de M et B la plus petite.

- a) Exprimer B et S en fonction de X et Y . Montrer que ce sont des variables aléatoires discrètes.
b) Prouver l'existence et donner la variance de B et S , ainsi que la covariance de B et S .
c) Les variables aléatoires B et S sont-elles indépendantes ?
d) Donner la loi de B .
-

Exercice 1313 Mines 2017

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente.

Exercice 1314 Ens 2021

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

On définit la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note A l'événement « M est diagonalisable ».

Montrer qu'il existe $c > 0$, indépendant de λ , tel que $\mathbb{P}(A) \leq c/\lambda$.

Exercice 1315 Mines 2017

Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On suppose que $P(X_{i,j} = 1) = P(X_{i,j} = -1) = 1/2$. On note M la matrice $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

- a) Calculer l'espérance de $\text{tr}(M)$.

- b) Calculer l'espérance de $\det(M)$.
 c) Calculer la probabilité que M soit de rang 1.
-



Exercice 1316 *Ens 2024*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour A partie de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $M(A)$ la matrice carrée de taille n à coefficients dans $\{0, 1\}$ caractérisée par $\forall (i, j), M(A)_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in A$.

On considère l'ensemble P des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ de cardinal n et une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur P .

Quelle est la probabilité que $M(X)$ soit inversible ?



Exercice 1317 *Mines 2023 et 2024*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $U = (X_1, \dots, X_n)$, $V = (Y_1, \dots, Y_n)$ et $M = U^T V$.

- Déterminer la loi du rang de M .
 - Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?
 - Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
-



Exercice 1318 *Mines 2023*

Soit $M = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice aléatoire réelle où les $(1 + X_{ij})$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in [0, 1[$.

- Calculer la probabilité pour que M soit symétrique.
 - Calculer la probabilité pour que M soit orthogonale.
-



Exercice 1319 *Ens 2023*

On considère une matrice aléatoire $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times n$ qui est symétrique, où chaque variable aléatoire $m_{i,j}$ suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et où les variables aléatoires $(m_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sont indépendantes.

- Calculer $\mathbf{E}(\text{Tr}(M))$, $\mathbf{E}(\text{Tr}(M^2))$ et $\mathbf{E}(\text{Tr}(M^3))$.
 - Montrer que $\mathbf{E}(\text{Tr}(M^4)) = \mathcal{O}(n^3)$.
 - On note λ_1 la plus grande valeur propre de M . Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(\lambda_1 \geq n\varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
-



Exercice 1320 *Ens 2024*

Soient $C \in \text{GL}_q(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ nilpotente. Soit $p \in]0, 1[$.

On définit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $B_0 = I_n$ et $B_{n+1} = A_n B_n$, où $\mathbf{P}(A_n = C) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = N) = 1 - p$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n \neq O)$.



Exercice 1321 *Ens 2024*

Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. Soit $p \in]0; 1[$. On pose $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les variables aléatoires $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et vérifient $\mathbf{P}(A_n = R) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = Q) = 1 - p$.

On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A_n U_{n-1}$.

On note $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ les instants n successifs où $A_n = Q$.

- a) Trouver la loi de $\|U_{t_1}\|$ où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne canonique.
 b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, donner une approximation du nombre d'indices i tels que $t_i \leq N$.

Dans toute la suite, on suppose que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

- c) Calculer $\mathbf{E}(\ln \|U_{t_1}\|)$.
 d) Déterminer la loi de $\|U_{t_2}\|$.
 e) Déterminer la loi de $\|U_{t_k}\|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
 f) Déterminer $\mathbf{E}(\ln \|U_{t_k}\|)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
-

Exercice 1322 Mines 2017, 2019 et 2023

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $N = n!$, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$, $p_1 < \dots < p_m$ les nombres premiers inférieurs à n .

- a) Calculer $\mathbb{P}(p_k|X)$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$.
 b) Montrer que les événements $(p_1|X), (p_2|X), \dots, (p_m|X)$ sont mutuellement indépendants.
 c) Soient $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ deux variables aléatoires suivant la loi de X . Déterminer $\mathbb{P}(X_1 \wedge X_2 = 1)$.
-

Exercice 1323 Mines 2022

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n . On munit $\mathcal{F}(E, E)$ de la loi uniforme. Pour $k \in E$, on note X_k l'indicatrice de l'événement $(k \in f(E))$, et Y la variable aléatoire donnant le cardinal de $f(E)$.

- a) Déterminer la loi de X_k .
 b) Déterminer l'espérance de Y .
 c) Pour k, ℓ distincts dans E , déterminer la covariance de X_k et X_ℓ .
-

Exercice 1324 Ens 2023

On considère deux capteurs indépendants, qui détectent chacun en moyenne 5000 événements par an. Quelle est la probabilité que les deux détecteurs détectent un événement pendant la même seconde ?

Exercice 1325 X 2020

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d de variables aléatoires suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(t)$ avec $t > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- a) Soit $T \in \mathbb{R}_+$. Expliciter $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq T)$.
 b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < t \\ 1 & \text{si } T > t \end{cases}$
-

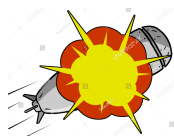
Exercice 1326 Mines 2017

Le nombre de voitures allant à (resp. venant de) Paris qui s'arrêtent à un barrage filtrant en une journée est une variable aléatoire X (resp. Y) qui suit une loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ). Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$. Si n voitures ont été arrêtées au barrage dans la journée quelle est la probabilité que k voitures soient allées à Paris ?

Exercice 1327 Ens 2024

Soient $\lambda \in [0, 1]$, $(X_{k,n})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n \geq 1}}$ des va mutuellement indépendantes, où $X_{k,n}$ suit la loi $\mathcal{B}(\lambda/n)$. On pose $X_n = X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$.

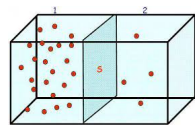
Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(\exp(tX_n))$.



Exercice 1328 *Ens 2022*

On lance une fusée sachant que la probabilité de la voir se crasher vaut 2%.

- Déterminer le nombre minimal n de lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un crash sur les n lancers dépasse $1/2$.
 - Existe-t-il un entier N de lancers tel que la probabilité d'observer au moins dix crashes parmi les N lancers soit supérieure à 0.9 ? Justifier.
-



Exercice 1329 *X 2020*

Un réservoir est divisé en deux compartiments séparés par une membrane, et contient $2N$ particules. À chaque unité de temps, une particule, prise au hasard, change de compartiment. Au temps $t = 0$, il y a N_1 particules dans le premier compartiment, et $2N - N_1$ dans le second. On note X_k le nombre de particules dans le premier compartiment au temps k .

- Exprimer la loi de X_{k+1} en fonction de la loi de X_k .
 - Exprimer $\mathbb{E}(X_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
 - En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
-



Exercice 1330 *Mines 2015*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \dots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.

- Déterminer la loi de (X, Y) , l'espérance de Y .
 - A-t-on $X \perp\!\!\!\perp Y$?
 - Calculer $P(X = Y)$.
-



Exercice 1331 *Mines 2018*

On considère une puce, située en $x = 0$ à $t = 0$ et qui, à intervalles réguliers, saute à gauche avec une probabilité g , saute à droite avec une probabilité d et reste au même endroit avec une probabilité r , de sorte que $g + d + r = 1$. On note X sa position après n étapes. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.



Exercice 1332 *X 2020*

- On considère une cible de rayon 1. Pour $n \geq 2$, on découpe la cible en n couronnes d'épaisseur $C_{i,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{i-1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{i}{n}\}$. On note X_n une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ telle que, pour tout i , $\mathbb{P}(X_n = i)$ soit proportionnelle à l'aire de $C_{i,n}$. Déterminer la loi de X_n .
 - Soit $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ croissante de limite $+\infty$. Montrer que $\mathbb{E}(g(X_n)) \rightarrow +\infty$.
 - Soit $h \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer $\mathbb{E}(h(\frac{X_n}{n}))$ et la limite éventuelle de $(\mathbb{E}(h(\frac{X_n}{n})))_{n \geq 1}$.
-

Exercice 1333*Mines 2024*

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ tel que la série $\sum p_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n . On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $(S \geq k)$ à l'aide des événements $(S_n \geq k)$. En déduire que S est une variable aléatoire.
 - Montrer que S est presque-sûrement finie.
 - Montrer que S admet une espérance et la calculer.
-

Exercice 1334*Mines 2023*

- Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Caractériser les événements A indépendants de tout événement B .

Soit Ω un ensemble contenant $N \in \mathbb{N}^*$ éléments.

- Existe-t-il une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que tous les événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ soient mutuellement indépendants ?
 - On considère n événements $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{P}(A_i) \in]0, 1[$.
Montrer que $2^n \leq N$.
-

Exercice 1335*Mines 2022*Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

- Montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire discrète X à valeurs complexes telle que X et $X + \lambda$ aient la même loi.
 - Déterminer les variables aléatoires discrètes X à valeurs complexes telles que X et λX aient la même loi.
-

Exercice 1336*X 2023*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que Y prenne un nombre fini de valeurs, et $\mathbf{E}(Y) = 0$. On suppose que $|X|$ admet une espérance.
Montrer que $\mathbf{E}(|X - Y|) \geq \mathbf{E}(|X|)$.

Exercice 1337*X 2019*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et que $\mathbb{E}(X) \geq a$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq \lambda a) \geq (1 - \lambda)^2 a^2$.

Exercice 1338*X 2019*

Soient c et λ deux éléments de $]0, 1[$, $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $X_0 = c$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)x + \lambda \mid X_n = x) = x, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)x \mid X_n = x) = 1 - x.$$

- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, X_n est presque sûrement à valeurs dans $]0, 1[$ et que l'ensemble $\{x \in]0, 1[; \mathbb{P}(X_n = x) > 0\}$ est de cardinal majoré par 2^n .
- Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
- Montrer qu'il existe $\mu_2 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{E}(X_n^2) - c| \leq \exp(-\mu_2 n)$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\mu_p > 0$ et $m_p > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{E}(X_n^p) - c| \leq m_p \exp(-\mu_p n)$.
- Si $t \in \mathbb{R}^{+*}$, quelle est la limite de la suite $(\mathbb{E}(t^{X_n}))_{n \geq 0}$?

**Exercice 1339**

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$.

On pose $S = X_1 + \dots + X_n$ et $m = p_1 + \dots + p_n$.

a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et soit $t > 0$, montrer que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{p(e^t-1)}$.

b) Soient t et δ , des réels strictement positifs, montrer que $\mathbb{P}(S \geq m(1+\delta)) \leq \frac{e^{m(e^t-1)}}{e^{m(1+\delta)t}}$

c) En déduire l'inégalité de Chernoff⁴ : $\mathbb{P}(S \geq m(1+\delta)) \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^m$

**Exercice 1340**

Ens 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On pose $d(X, Y) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A))$. Soit $B = \{k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$.

a) Montrer que $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

b) Montrer que $d(X, Y) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$.

c) Montrer que $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$.

**Exercice 1341**

Ens 2018

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

Montrer que les racines de P sont toutes négatives ou nulles si et seulement si les coefficients de P sont tous de même signe.

b) Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ de degré n .

On suppose qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ telle que $P_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Y_n = k) X^k$.

Montrer que Y_n suit la même loi qu'une somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

c) Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ une suite de polynômes vérifiant les hypothèses de b).

On suppose que $P'_n(1)/n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Montrer que (Y_n) vérifie une loi des grands nombres.

**Exercice 1342**

X 2017 et Ens 2022

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq m \leq n$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer

$$\mathbb{E} \left(\frac{X_1 + \dots + X_m}{X_1 + \dots + X_n} \right).$$

**Exercice 1343**

Centrale 2021, Mines 2023

Soit X une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre 2.

a) Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$, $g(x) \geq b$.

Montrer que $\mathbb{P}(X \in I) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{b}$.

b) On suppose que X est une variable centrée d'écart-type σ .

En considérant $g(x) = (x + \varepsilon)^2$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$.

4. Herman Chernoff, né en 1923, mathématicien et physicien américain, professeur au M.I.T.

c) On suppose X à valeurs positives. Montrer que $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$.

Exercice 1344 *Ens 2019*

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(A \cap (X_k = 1)) \in]0, p[$.

Exercice 1345 *Ens 2015*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans une partie dénombrable de $[0, 1]$. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.

Exercice 1346 *Ens 2024*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$. Déterminer $\mathbf{E}(M_n^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ind. Distinguer selon la parité de k .

Exercice 1347 *Ens 2017*

Soit $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On suppose que, pour tout k , $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k X^k$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{P}_n(\alpha)$ la probabilité que α soit racine de Q_n .

- Calculer $\mathbb{P}_n(1)$. Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}_{2n-1}(1)$.
 - Calculer $\mathbb{P}_n(i)$.
 - Calculer $\mathbb{P}_n(j)$. Montrer que $\mathbb{P}_n(j) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
-

Exercice 1348 *Ens 2024*

On note $D(X)$ le nombre de diviseurs premiers de X , où X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(D(X))$.
 - On admet que $\sum_{p \text{ premier}, p \leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln n)$. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{D(X)}{\ln(\ln n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.
-

Exercice 1349 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- On suppose qu'elles ont même loi et que $\forall n \geq 0, \mathbb{P}(X = n) > 0$. Si elles sont indépendantes, les v.a.d. $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?
 - Réciproquement, on suppose que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. Les v.a.d.s X et Y sont-elles indépendantes ?
 - On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2, et que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. Comparer la variance de X et celle de Y .
-

Exercice 1350*Ens 2016 et 2022*

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On dit que λ est une valeur médiane si $\mathbb{P}(X \leq \lambda) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \geq 1/2$.

- Montrer qu'il existe une valeur médiane. Est-elle forcément unique ?
 - Trouver t minimisant $t \mapsto \mathbb{E}((X - t)^2)$.
 - Trouver t minimisant $t \mapsto \mathbb{E}(|X - t|)$.
-

Exercice 1351*Ens 2019*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, centrées et admettant une variance. On pose, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$. Soit $a > 0$.

Montrer que $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.

Ind. Considérer la variable aléatoire T telle que $T = \min\{k \in \{1, \dots, n\}, |S_k| \geq a\}$ si cet ensemble est non vide, $T = 0$ sinon. Montrer que $a^2 \mathbb{P}(T = k) \leq \mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{T=k})$ si $k \geq 1$.

Exercice 1352*Ens 2024*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$.

- Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.
 - Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $A > 0$, $\mathbf{P}(X > A) > 0$.
-

Exercice 1353*Ens 2024*

Soient, pour $\lambda > 0$, $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda$ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

- Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda \text{ n'a que des racines réelles})$.
 - Même question pour $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$.
-

Exercice 1354*Ens 2022*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y et on note $X \leq_{st} Y$ si l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t)$.

- Montrer que $X \leq_{st} Y$ si et seulement si toute fonction $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et bornée vérifie : $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y))$.
 - On considère X et Y et à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, telles que $X \leq_{st} Y$. Montrer que : $\mathbb{P}(X \leq Y) > 1/2$. Peut-on améliorer ce résultat en mettant $a > 1/2$ au lieu de $1/2$?
-

Exercice 1355*X 2024*

Soient $p \in]0, 1[$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$.

Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

Exercice 1356

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On cherche à savoir si $A = B$.

On considère pour cela $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ mutuellement indépendantes. On pose X le vecteur colonne ${}^t(X_1, \dots, X_n)$.

Montrer que si $A \neq B$ alors $\mathbb{P}(AX = BX) \leq \frac{1}{2}$.⁵

5. Ce résultat est la base d'un algorithme probabiliste dû à Freivald permettant de vérifier le calcul du produit de deux matrices.

Exercice 1357*Ens 2019*

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher : pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On note X le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ et $\delta_V(X)$ la distance de X à V .

- Dans cette question, $n = 2$ et V est une droite. Déterminer $\mathbb{E}(\delta_V(X)^2)$.
 - Traiter le cas général pour V de dimension p .
-

Exercice 1358*Mines 2023*

On munit l'ensemble Ω , fini à $n \geq 2$ éléments, de la loi de probabilité uniforme. On note F l'espace des variables aléatoires réelles sur Ω .

- Montrer que l'application $(X, Y) \in F^2 \mapsto \mathbb{E}(XY)$ définit un produit scalaire sur F .
 - Déterminer la projection orthogonale de $X \in F$ sur la droite dirigée par la variable 1.
-

Exercice 1359*Centrale 2023*

Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2q + 1$. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note A_k le point d'affixe $z_k = e^{2ik\pi/n}$. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, soit B_k le point d'intersection de la droite $(A_0 A_k)$ avec la droite d'équation $x = -1$. Soit W_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit $Z_n = 2 \cotan\left(\frac{\pi W_n}{n}\right)$.

- Montrer que l'ordonnée de B_k est égale à $2 \cotan\left(\frac{\pi k}{n}\right)$.
 - Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.
 - Donner un équivalent de $\mathbf{E}(|Z_n|)$ quand n tend vers l'infini.
-

Exercice 1360*X 2018*

Soient $\alpha \in]0, \pi[$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n = \alpha) = \mathbb{P}(X_n = -\alpha) = 1/2$.

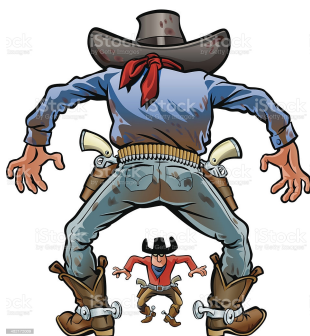
Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ la suite de points de $\mathbb{R}^2$ telle que $A_0 = (0, 0)$, $A_1 = (1, 0)$ et, pour $n \geq 2$, A_{n+1} vérifie $A_n A_{n+1} = 1$ et $\widehat{A_{n-1} A_n A_{n+1}} = X_n$.

Soit R_n la distance euclidienne canonique entre A_0 et A_n . Calculer $\mathbb{E}(R_n^2)$.

Exercice 1361

X 2021 Soit (ABC) un triangle orienté. Trois particules sont situées à tout instant en A , B ou C . À l'instant 0 elles sont toutes trois en A . À l'instant n elles peuvent de manière équiprobable rester en place ou tourner dans le sens trigonométrique, ces trois actions étant indépendantes entre elles.

Calculer la probabilité de l'événement : « toutes les particules sont au même endroit à l'instant n ».

Exercice 1362*Un combat à trois*

Averell, Billy et Chuck se battent dans une ville du Far West. Averell, Billy et Chuck ont respectivement les probabilités 50%, 80% et 100% d'atteindre leur cible.

L'ordre pour tirer (par exemple 1,2,3) est fixé par tirage au sort. Ensuite, ils tirent dans l'ordre 1,2,3,1,2,3,... (sauf si l'un d'eux vient à être abattu), jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un survivant !

Chacun est libre de choisir sa cible comme il le désire.

Le tirage au sort a désigné Averell comme devant tirer le premier : Quelle est sa meilleure stratégie ?

Exercice 1363 Une princesse  est retenue prisonnière dans un chateau.

Un prince charmant  se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant trois portes. Il en ouvre une au hasard.

- Derrière une porte se trouve un dragon qui dévore le prince s'il l'ouvre.
- Derrière une deuxième porte se trouve la princesse que le prince peut alors délivrer.
- Derrière la troisième porte se trouve une sorcière qui lui fait boire un filtre qui a pour effet de remettre le prince à la porte du château en le faisant oublier la porte qu'il a choisie, de sorte que le prince retente de délivrer la princesse.

Le prince est un homme déterminé et il renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré par le dragon.

1. Calculer la probabilité de l'événement $D_k =$ « il délivre la princesse au k -ème essai. »
2. Calculer la probabilité de l'événement $D =$ « il délivre la princesse . »
3. On note T le nombre de tentatives du prince (c'est à dire le nombre de fois où il est amené à choisir une porte à ouvrir). Donner la loi de T ainsi que son espérance.
4. On note R le nombre d'essais nécessaires pour délivrer la princesse. Si le prince échoue, on convient que $R = 0$. Donner la loi de R ainsi que son espérance.
5. Quelle est la probabilité que le prince recommence indéfiniment ses tentatives ?
6. Si le prince échoue dans sa tâche (et termine donc dans le gosier du dragon), le syndicat des princes envoie immédiatement un autre prince (qui procède suivant les mêmes paramètres), jusqu'à ce que la princesse soit délivrée.

Calculer le nombre moyen de princes « utilisés » pour délivrer la princesse.

