



LES BASIQUES

Exercice 1409  *X 2012* Dérivée de $x \mapsto \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt} dt$?

Exercice 1410  *Mines 2022*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.
Montrer que f est continue. Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$?
Que valent $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

Exercice 1411  *Mines 2024*
Déterminer les extrema de $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 1412  *Centrale 2017, Mines 2024*
Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Exercice 1413  *Centrale 2017*
Soit $f : (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \mapsto \frac{x+y+1}{3} - \sqrt[3]{xy}$. Déterminer les extrema locaux et globaux de f .

Exercice 1414  *Mines 2024*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Déterminer f .

Exercice 1415  *Ens 2024*
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^2$ et telles que $f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 1416  *Centrale 2011* Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} : x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 1417  *Centrale 2009*
Soient $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y > 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, v^2 - 4u > 0\}$ et $\Psi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (xy, x + y)$.
a) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ réalise une bijection de U_1 sur U_2 .
b) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(U_1, \mathbb{R})$ telles que : $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y - x) f$.

1. le concours, l'année, l'examineur, la note...

Exercice 1418*Centrale 2022*

On fixe un réel $a > 0$ et on considère $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16a^2\}$.

- a) Montrer que l'ensemble Γ des points de E en lesquels le plan tangent passe par le point $A = (0, 4a, 4a)$ est une courbe plane.
- b) On note L l'intersection de E avec le plan d'équation $z = 2a\sqrt{2}$. Montrer qu'une représentation paramétrique de L est $t \mapsto (a\sqrt{2} \cos t, 2a \sin t, 2a\sqrt{2})$.
- c) Donner une représentation paramétrique de la réunion S des normales à E rencontrant L . Préciser l'intersection de S avec le plan d'équation $z = 0$.
-

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1419*X 2017, Mines 2022 et 2023*

- a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.
- b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x^3 + y^3)$. Déterminer $g(\mathbb{R}^2)$.
-

Exercice 1420*X 2017*

Soit $f : (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mapsto (x^2/y, y/x) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

- a) L'application f est-elle bijective ? est-elle prolongeable par continuité en certains points ?
- b) Déterminer toutes les suite $((x_n, y_n))$ stationnaires d'éléments de $\mathbb{R}^2$ vérifiant, pour n dans $\mathbb{N}$, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$.
-

Exercice 1421

Soit $\varphi : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

- a) Montrer que φ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.
- b) Même question en $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
-

Exercice 1422

- a) Montrer que l'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- b) Calculer la différentielle du déterminant.
- c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Déterminer a_1 en fonction de la comatrice de A .
-

Exercice 1423*Centrale 2013*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

- a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. b) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.
- c) L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
-

Exercice 1424*Ens 2017*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq a N(x - y)^2$. Montrer que :

$$\lim_{N(x) \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 1425*Mines 2023*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

$$\forall (x, y, t) \in E^2 \times [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{t(1-t)}{2} \|x - y\|^2.$$

- a) Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x) - \frac{1}{2} \|x - y\|^2$.
b) Montrer que, pour $x, y \in E$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \|x - y\|^2$.
-

Exercice 1426*X 2013*

Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est lipschitzienne sur toute boule de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1427*X 2012*

Trouver les solutions de $(E) : x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = g$ pour $g = 0$, pour $g = 1$ puis pour $g : (x, y) \mapsto x^2 y^2$.

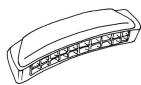
Exercice 1428*Centrale 2010, X 2014, Ens 2016, Mines 2022 et 2023*

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $u : x \mapsto f(x, x)$ et $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$. Calculer u' . Calculer la différentielle de g en (a, b) .

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit que f est α -homogène si et seulement si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$. Montrer que f est α -homogène si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

c) Déterminer les $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (z - y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial f}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

**Exercice 1429** *Centrale 2018*

Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on dit que $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$ est *harmonique* si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

a) Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Déterminer les conditions sur g pour que $f : (x, y) \mapsto g(x^2 + y^2)$ soit harmonique sur Ω .

b) Soient φ et ψ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(x) \psi(y)$. Déterminer les conditions sur φ et ψ pour que f soit harmonique sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $f(0, 0) = 0$.

Exercice 1430 *Exercice destructeur**Centrale 2009, X 2009, X 2010, Centrale 2017*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Montrer que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(r) = \int_0^{2\pi} f(a + r \cos t, b + r \sin t) dt$ est constante.

Exercice 1431

Ens 2023

Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. a) Donner un exemple de telles fonctions u et v .

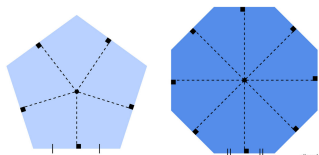
b) On suppose que u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\Delta u = \Delta v = 0$.

c) Montrer que, pour tout $r > 0$, $u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta$.

d) Soit V un ouvert contenant $(0, 0)$. Soit u de classe $\mathcal{C}^2$ sur V telle que $\Delta u = 0$ sur V . On admet que sous ces conditions, l'égalité de c) est encore valable pour $r > 0$ suffisamment petit.

On note D le disque unité ouvert et C le cercle unité. Soit g une fonction continue sur D et f une fonction continue sur C .

Montrer qu'il existe au plus une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité fermé, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et telle que $\Delta u = g$ sur D et $u = f$ sur C .

**Exercice 1432**

Ens 2023

Montrer qu'un polygone convexe à n sommets inscrit dans le cercle unité est d'aire maximale si et seulement si le polygone est régulier.

Exercice 1433

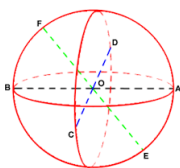
Centrale 2016, 2018, Mines 2022

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ pour $x \neq y$, $F(x, x) = f'(x)$.

a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x)) dt$.

b) Montrer que F est continue.

c) Montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors F est $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 1434**

Mines 2022 et 2023

Soit E un espace euclidien de dimension ≥ 2 . On note B (resp. S) la boule unité fermée (resp. la sphère unité) de E .

$$\text{Soit } \mathcal{A} = \left\{ \frac{\|u + v\| + \|u - v\|}{\max(\|u\|, \|v\|)} ; (u, v) \in (E \setminus \{0\})^2 \right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{A} = \{\|u + v\| + \|u - v\| ; (u, v) \in S \times B\}$.

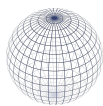
b) Montrer que $\mathcal{A} = \{|1 + z| + |1 - z| ; z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

c) On pose $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |1 + x + iy| + |1 - x - iy|$. Déterminer l'ensemble Ω des points où f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chaque variable.

d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

e) Déterminer les points critiques de f dans la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne standard).

f) Conclure en explicitant l'ensemble $\mathcal{A}$.

**Exercice 1435***X 2019, Centrale 2024*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ [resp. $\overline{B}(a, r)$ et $\partial B(a, r)$] la boule ouverte de centre a et de rayon r [resp. la boule fermée et la frontière de la boule]. Soit $f : \overline{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{B}(a, r)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(a, r)$. Pour $x \in B(a, r)$, on définit $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$.

a) On suppose $\Delta f > 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que f atteint un maximum et que celui-ci ne peut pas être atteint en un point de $B(a, r)$.

b) On suppose $\Delta f \geq 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que $\sup_{x \in \overline{B}(a, r)} f(x) = \sup_{x \in \partial B(a, r)} f(x)$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$, considérer $\tilde{f}_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x - a\|^2$.

LES AUTRES**Exercice 1436***Mines 2023*

Soient $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x - y| < z < x + y\}$ et $f : (x, y, z) \in \Omega \mapsto \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}\right)$.

a)) Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$.

b)) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

**Exercice 1437***Centrale 2019*

Soit $f : (x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. c) Simplifier l'expression de f .

**Exercice 1438***Ens 2021*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour $p \in E$, $I(p) = \int_0^1 \sqrt{1 + p'^2}$. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E .

**Exercice 1439***Mines 2019*

Etude (continuité, classe $\mathcal{C}^1$, extrema) de $f(x, y)$ définie sur $[0, 1]^2$ par :

$f(x, y) = x(1 - y)$ si $x \leq y$ et $f(x, y) = y(1 - x)$ si $y \leq x$.

**Exercice 1440***Centrale 2022*

a) Déterminer le domaine de définition de $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{x^n + y^n}$.

b) Montrer que $\psi : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1 + t^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.

c) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser.

**Exercice 1441***Centrale 2018*

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

a) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

b) Déterminer les extrema de f .

Exercice 1442**42**

Soit $f : U \rightarrow V$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{42}$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^q$. On suppose que f est différentiable en a et que f admet une fonction réciproque g , différentiable au point $b = f(a)$. Montrer que $q = 42$.

Exercice 1443*Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ Centrale 2021*

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto f(z)$ que l'on écrit de la manière suivante : $x + iy \mapsto X(x, y) + iY(x, y)$ où X et Y sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si le quotient $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ admet une limite quand $h \rightarrow 0$ dans $\mathbb{C}^*$ (on dit alors que f est holomorphe).

1. Montrer que f est dérivable en z_0 si et seulement si $\frac{\partial X}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Y}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial X}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Y}{\partial x}(z_0)$ (conditions de Cauchy).
 2. Les fonctions suivantes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont-elles dérivables ?
 $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.
-

Exercice 1444*Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.*

- a) Combien de valeurs au total peuvent prendre les dérivées partielles de f d'ordre k en $(0, 0)$?
 - b) Donner un exemple où ce nombre est maximal.
-

Exercice 1445*X 2012*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées partielles sont bornées par 1. Montrer : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|_2$.

Exercice 1446*Ens 2017*

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leq x \leq y$.

Montrer que $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))| \leq \frac{1}{2} \int_x^y (\|\varphi'(t)\|^2 + \|\nabla f(\varphi(t))\|^2) dt$.

À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 1447*Ens 2012*

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien canonique. Soit $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

- a) On suppose qu'il existe x et b dans $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $(b - a(y)|x - y) \geq 0$. Montrer que $b = a(x)$.
- b) On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$ et : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n$, $(a(x) - a(y)|x - y) \geq 0$.

On note $J_a(x)$ la jacobienne de a en x . Montrer que $J_a(x) + J_a(x)^T$ est symétrique et positive.

Exercice 1448*Le théorème de Rolle dans l'espace*

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et B la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S . Etablir l'existence de $x_0 \in B$ tel que $df_{x_0} = 0$.

Exercice 1449 *X 2016*

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a \sin(y), y + b \sin(x))$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire que f soit bijective et telle que, $df_{(x,y)}$ soit un automorphisme en tout point.

Exercice 1450 *Ens 2013*

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathcal{S} & \longrightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ (t, X_0) & \longmapsto e^{tA} X_0 \end{cases}$ est définie, continue et bijective.

Exercice 1451 *X 2011* Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f est bijective.

Exercice 1452 *X 2024*

Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in \text{SO}_4(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(A)$.

Exercice 1453 *Centrale 2024*

Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. Soit $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2, P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$. Montrer que Σ admet un minimum et le déterminer.

Exercice 1454 *Mines MP 2023*

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une forme linéaire sur E .

Montrer que l'application $g : x \in E \mapsto f(x) e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis déterminer ce maximum et ce minimum.

Exercice 1455 *Centrale 2021* Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on pose $f(x, y) = x e^y + y \ln(x)$. Etudier l'existence d'extrema locaux et globaux de la fonction f .

Exercice 1456 *Centrale 2021* On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique et on note $D = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ sa sphère unité.

a) Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b_S : x \in D \mapsto x^T S x$. Montrer que b_S admet un maximum.

b) Montrer que ce maximum est une valeur propre de S .

Exercice 1457 *Centrale 2021* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$.

a) La fonction f admet-elle un maximum global ?

b) La fonction f admet-elle un minimum global ?

c) Mêmes questions sur la restriction de f à $[1, 3]^2$.

Exercice 1458 *Centrale 2016 et 2018*

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < y < 1\}$, $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$. Étudier les extrema de f sur D et sur D' .

Exercice 1459 *Ens 2024*

Montrer que la fonction $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) = \int_0^1 (P(x) - e^x)^2 dx$ admet un unique point critique.

Exercice 1460 *X 2018* Déterminer les $y \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y^4 + xy + x^4 \geq 0$.

Exercice 1461 *Centrale 2018* Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y)^3 + 6xy$. Étudier l'existence d'extrema globaux pour f sur $\mathbb{R}^2$, puis sur le disque unité.

Exercice 1462 *Centrale 2012* Soit $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
a) Soit D une droite contenant $(0, 0)$, montrer que f restreinte à D possède un minimum local en $(0, 0)$.
b) Montrer que f ne possède pas de minimum local en $(0, 0)$.

Exercice 1463 *Mines 2009, 2010 et 2011* Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y)^2 - (x^4 + y^4)$.
1. Déterminer la limite de f quand $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.
2. Montrer que f admet un maximum et le déterminer.

Exercice 1464 *X 2008* Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on considère la sphère unité S .
Extrema de $\varphi : (x, y, z) \in S^3 \mapsto (x|y) + (y|z) + (z|x)$?

Exercice 1465 *Centrale 2013*
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
a) soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (a|x)$. Déterminer le gradient de φ .
b) soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que f possède un minimum.
c) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Montrer que $x \mapsto \nabla f$ est surjective.

Exercice 1466 *Centrale 2024*
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ∇f .
b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et exprimer le point x^* où ce minimum est atteint.

Exercice 1467*X 2020*

On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathbb{R}^p$ fixé.

Soit $\varphi : X \mapsto \|AX - Y\|^2$.

- Montrer que φ admet un minimum local en X_0 si et seulement si $A^T(AX_0 - Y) = 0$.
 - Montrer que φ admet un minimum en un unique point si et seulement si A est injective.
-

Exercice 1468*Ens 2013*

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré 3, tel que $P(0) = 0$. Montrer que $P(1) + P(j) + P(j^2) = 3$.
 - Soient A, B et C trois points distincts du plan, $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $R > 0$, $M_1M_2M_3$ un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.
Montrer que l'un des sommets S du triangle vérifie : $SA \times SB \times SC \geq R^3$.
-

**Exercice 1469***Mines 2017*

Soit $U = \{(x, y) \in]-\pi/2, \pi/2[^2 ; x < 0, y > 0, y - x > \pi/2\}$ et $f : (x, y) \mapsto \tan(y) - \tan(x) + \tan(x - y)$.

- Montrer que f admet un minimum sur U .
 - Soit C un disque du plan. Trouver les triangles contenant C et d'aire minimale
-

Exercice 1470*Mines 2011* Soient ABC un vrai triangle et T son intérieur.

Déterminer le maximum de $F : M \mapsto d(M, (AB)) \times d(M, (BC)) \times d(M, (AC))$ sur T .

Exercice 1471

Soient A, B, C 3 points du cercle trigonométrique repérés par leurs arguments α, β, γ .

- Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de α, β, γ et en déduire les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle.
 - Retrouver ce résultat par des considérations géométriques élémentaires.
-

Exercice 1472*Mines 2023*

- Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[\times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que

$$x(x-1)\frac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x^2f = 0.$$

Ind. Effectuer le changement de variables $x = u$ et $y = uv$.

- Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts, $f_i : x \mapsto \exp(a_i x)$ pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
 - Le sous-espace vectoriel des solutions obtenu dans la première question est-il de dimension finie ?
-

Exercice 1473*Centrale 2016*

Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. *Ind.* On posera $(u, v) = (x, y e^{x^2/2})$.

Exercice 1474*X 2019*

Déterminer les $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercice 1475*Centrale 2017*

Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > |y|\}$ et $f : (x, y) \in \Omega \mapsto \int_0^\pi \ln(x + y \cos(t)) dt$.

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

b) Calculer ∇f en tout point de Ω . c) Calculer $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 1476*X 2024*

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On suppose que $\nabla(\Omega)(0) = 0$ et on note $D_a^2(\Omega)$ la hessienne en a de Ω . On suppose que $\text{Im}(D_a^2(\Omega)) = F$, où F est indépendant de a et de rang p .

Montrer qu'il existe un changement de coordonnées f (c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$) tel que, pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\Omega \circ f)(x_1, \dots, x_d)$ ne dépende que de $(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 1477*Ens 2023*

On considère $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, où X et Y indépendantes avec X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{G}(p)$.

a) Déterminer la probabilité que M soit inversible.

b) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable. Dans ce cas, préciser spectre et espaces propres.

c) Déterminer la probabilité que $M^8 = I_2$.

d) Déterminer la probabilité qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ admettant un minimum local strict en $(0, 0)$ et dont la matrice Hessienne en $(0, 0)$ est M .

**Exercice 1478***Centrale PSI 2023*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

a) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ on note $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer φ'' en fonction de la matrice Hessienne de f .

b) En considérant la fonction $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \frac{t^2}{2} x^T x$, montrer l'inégalité

$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^T x.$$

c) En déduire que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

**Exercice 1479**

Soient $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

Déterminer la Hessienne de f en fonction de celle de g .

**Exercice 1480***Ens 2021*

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est constante.

a) Montrer que f est affine.

b) On suppose l'existence d'un ouvert borné non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que f s'annule en tout point de la frontière de Ω . Montrer que f est nulle.

**Exercice 1481***Inégalités de Taylor-Lagrange*

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall a \in U, \|H_f(a)\|_\infty \leq M$.

a) Montrer que $\forall (A, B) \in U^2, |f(B) - f(A) - df_A(\vec{AB})| \leq \frac{M \|\vec{AB}\|_1^2}{2}$.

b) Montrer que $\forall (A, B) \in U^2, |f(B) - f(A) - df_C(\vec{AB})| \leq \frac{M \|\vec{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A, B]$.

**Exercice 1482***Ens PSI 2023*

On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. On dit que f est différentiable sur l'ouvert Ω si ∇f existe et est continu.

- Soient C ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^d$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que ∇f est L -lipschitzien.

Soient $w, v \in C$ et $g : t \mapsto f(v + t(w - v))$.

(a) Exprimer $g'(t)$.

(b) Montrer que $f(w) - f(v) = \int_0^1 \langle \nabla f(v + t(w - v)), w - v \rangle dt$.

(c) Montrer que $f(w) \leq f(v) + \langle \nabla f(v), w - v \rangle + \frac{L}{2} \|w - v\|^2$.

- Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall w, v \in \mathbb{R}^d, f(w) \geq f(v) + \langle \nabla f(v), w - v \rangle$$

Ind. Commencer par $d = 1$.

- Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On pose $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2L} \nabla f(v_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $f(v_{n+1}) \leq f(v_n) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(v_n)\|^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- On suppose de plus f convexe.

(a) Montrer que $\forall w \in \mathbb{R}^d, f(v_{n+1}) \leq f(w) + \langle \nabla f(v_n), v_n - w \rangle - \frac{1}{2L} \|\nabla f(v_n)\|^2$.

(b) Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2} (\|v_n - w\|^2 - \|v_{n+1} - w\|^2)$.

(c) Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2n} \|w\|^2$.

5. Soit v_* un point critique de f .

Montrer que v_* est un minimum local de f et que la suite (v_n) converge vers v_* .

Exercice 1483



Exercice vibrant

On appelle équation des cordes vibrantes $(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

a) A l'aide du changement de variable $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$ donner l'ensemble des solutions $\mathcal{C}^2$ de (E) .

b) En déduire les solutions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - c^2 t^2}}$

Exercice 1484



Centrale 2014

a) Résoudre l'équation $(*) : 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ à l'aide du changement de variable $(u, v) = (x + 2y, x - 2y)$.

b) Existe-t-il une solution f de $(*)$ telle que : $\forall y, \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$ et $\forall x, f(x, 0) = x^2$?

Exercice 1485



Centrale 2010

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si φ admet un maximum local en $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\varphi''(a) \leq 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \Gamma, f(x, y) = 0$.

On pose, pour $(x, y) \in D$, $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

(a) On suppose $\Delta f > 0$ sur D . Montrer que $\forall (x, y) \in D, f(x, y) < 0$.

(b) On suppose $\Delta f \geq 0$ sur D . Montrer que $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq 0$.

☛ Considérer $f_\varepsilon : (x, y) \mapsto f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - 1)$ avec $\varepsilon > 0$.



Exercice 1486

Centrale 2022

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ telles que $\varphi : (x, y, z) \in (\mathbb{R}^*)^3 \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$ soit de laplacien nul.



Exercice 1487

Mines 2021

Soient $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à R .

Montrer (i) $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \Delta(f \circ r) = (\Delta f) \circ r \iff$ (ii) $R \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1488



X 2015 et 2017

Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, n un entier supérieur ou égal à 2, et f l'application définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ par l'égalité $f(X) = g(\|X\|^2)$. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 1489 *Centrale MP 2023*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

- a) Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F . Justifier la formule.
- b) On définit la fonction $d_F : E \setminus F \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.
-

 Exercice 1490 *X 2012* Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui à P associe $P {}^tP$.

- a) Si M appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que la différentielle de f en M est surjective.
- b) Soit g la restriction de f à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle toujours surjective ?
-

Exercice 1491 *Centrale 2018* Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$.

- a) Montrer qu'il existe $e_1 \in S$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(x) \leq f(e_1)$.
- b) Calculer le gradient de f en e_1 de deux manières différentes.

- c) En déduire que e_1 est un vecteur propre de A . d) En déduire le théorème spectral.
-

 Exercice 1492 *X 2014*

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R}^2)$. On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t \mapsto \|f(t)\|$ soit croissante sur $[0, \varepsilon]$.

 Exercice 1493 *X 2024*

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^N$ qui tend vers 0 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - \varphi_n$ admette un minimum local en x_n .

 Exercice 1494 *Mines 2022*

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \geq \|x\|$ (pour la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

 Exercice 1495 *Ens 2023*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$(*) \quad : \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \text{ et } f(0, x) = P(x).$$

- a) Montrer qu'il existe une solution de $(*)$ polynomiale en x .

- b) On suppose P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Soit f une solution de $(*)$ polynomiale en x . Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, $x \mapsto f(t, x)$ est aussi scindé à racines simples.

Exercice 1496*X 2022*

Soit ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur à ABC .

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est indépendante du choix du point M .

Exercice 1497*X 2016*

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x^3 - 2x\}$. a) Tracer D . b) Soient A et B deux points distincts de D d'abscisses ≤ 0 . Discuter le nombre de points d'intersection entre la droite (AB) et D .

Exercice 1498*X 2014*

Soient $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et $A = (0, 0, -1)$. Soit f l'application de $\mathcal{S} \setminus \{A\}$ dans la plan d'équation $(z = 0)$ qui à M associe le point $f(M)$ d'intersection de la droite (AM) et du plan $(z = 0)$. Montrer que les coordonnées de M sont rationnelles si et seulement si celles de $f(M)$ le sont.

Exercice 1499*Centrale 2022*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(X) = 1\}$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $M \mapsto \|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.

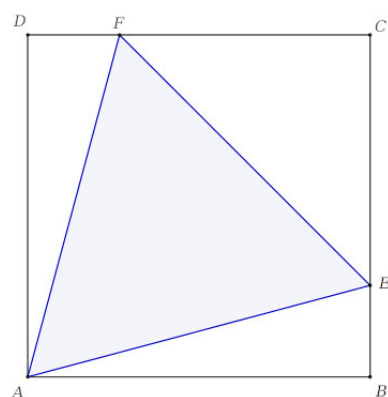
On note $f(M) = \|M\|^2$ et $g(M) = \det(M) - 1$.

a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que f atteint un minimum global sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

b) Calculer ∇f .

c) On cherche explicitement ce minimum. Soit M_0 une matrice où ce minimum est atteint. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Construire une fonction $\gamma : I \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, I étant un intervalle réel entourant 0, telle que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.

d) On admet que $\nabla g(M) = (M^T)^{-1}$. En déduire que M_0 est orthogonale directe. Étudier la réciproque.

**Exercice 1500***X MP 2023*

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A , B et C sur ce carré.

a) Montrer qu'il existe une disposition des points A , B et C maximisant l'aire du triangle ABC .

b) Caractériser une telle disposition.
