Feuille n° 18 : Exercices variables et aléatoires [1]

« Gott würfelt nicht », *Albert Einstein, 1927*

Les basiques

Exercice 1280  *Mines 2023*

On considère le lancer de deux dés équilibrés. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales au résultat des lancers, et on suppose X_1 et X_2 indépendantes. On note $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

a) Déterminer la loi de X. Calculer son espérance. En déduire la loi de Y .

b) Simplifier XY . En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 1281  *Mines 2023*

On allume une ampoule. On note X le temps de vie de cette ampoule (en jours). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'ampoule est allumée le jour n, calculer le nombre moyen de jours où cette ampoule restera allumée.

Exercice 1282  *Mines 2023*

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur $\mathbb{N}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = x, Y = y) \neq 0$.

Prouver que $X + Y$ et $X - Y$ ne sont pas indépendantes.

Etudier la même question avec $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$.

Exercice 1283  *Centrale 2023*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k + X_{k+1})$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 1284  *Ens 2023*

On retourne une par une les cartes d'un jeu de 52 cartes. Trouver l'espérance du nombre de cartes retournées avant d'obtenir le premier as (on demande un raisonnement intuitif sans calcul de la loi).

Exercice 1285  *Ens 2023*

Soient σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $A \subset [\![1, n]\!]$. On pose $k = |A|$. Calculer $\mathbf{P}(A = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\})$.

---

1. mais discrets...

Exercice 1286  *Ens 2023*

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1,2,3\}$ telles que Y suive la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ et $\mathbf{P}(X=1)=\frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X=2)=\mathbf{P}(X=3)=\frac{1}{4}$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{E}((X-Y)^2)$?

Exercice 1287  *Ens 2023*

Existe-t-il des variables aléatoires X, Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Y \sim \mathcal{P}(p)$ et telles que l'on ait $\mathbf{P}(X=Y) = 1-p+pe^{-p}$?

Exercice 1288  *Ens 2023*

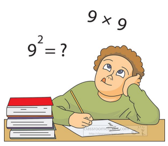
On considère X de loi $\mathcal{B}(p)$ et Y de loi $\mathcal{P}(p)$ avec $p \in [0,1]$. Majorer $\mathbf{P}(X=Y)$ et trouver des variables X et Y pour lesquelles cette majoration est atteinte.

Exercice 1289  *X 2022*

Alice a oublié son mot de passe, elle sait qu'il est de taille p. Il existe en tout n caractères différents. Sachant qu'Alice ne va pas réessayer un mot de passe qu'elle a déjà tapé, quelle est l'espérance du nombre de tentatives nécessaires pour trouver son mot de passe.

Exercice 1290  *Mines 2021*

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. Donner la loi, l'espérance et la variance de $X-Y$.

Exercice 1291 *Mines 2019* 

Un élève de 

descend une liste de n exercices les uns après les autres.
Pour chaque exercice, il a une probabilité p de le résoudre.
Les exos sont résolus indépendamment les uns des autres.
Soit X_1 le nombre d'exos résolus.
Il reprend ensuite les $n-X_1$ exercices non résolus la première fois : à nouveau, son taux de résolution est de p lors de la deuxième tentative.
Soit X_2 le nombre d'exercices résolus lors de la deuxième tentative.
L'élève recommence jusqu'à ce qu'il ait résolu les n exercices.
On note X_k le nombre d'exercices résolus lors de la k-ième tentative.
Déterminer la loi de X_1, la loi de X_1+X_2, la loi de $X_1+\cdots+X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Application numérique : $n = 1408$ et $p = 0,8$ (pfli) : calculer le nombre moyen de fois où il devra reprendre les exercices pour tous les résoudre.

Exercice 1292  *Ens 2016*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n)=0$ et qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n^2) \leqslant M$.
Soit $\varepsilon > 0$. A t-on toujours $P(|X_1+\cdots+X_n| \geqslant n\varepsilon) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$?

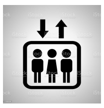
Exercice 1293  *X 2018*
Soit X un ensemble de cardinal fini et A un sous ensemble de X.
On note $p = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} X}$.
Soit $n \geqslant 1$. On effectue n tirages d'éléments de X indépendants et avec remise.
On note $(X_1, ..., X_n)$ les éléments tirés lors de l'expérience et $S = \dfrac{1}{n} \times \operatorname{card}(i \in [\![1, n]\!], X_i \in A)$.
Soit r un réel, montrer que $\mathbb{P}(|S - p| \leqslant r) \geqslant 1 - \dfrac{1}{4rn^2}$.

Exercice 1294  *X 2018*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$.
Montrer que $\dfrac{\mathbb{E}(X) - k + 1}{n} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant k) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{k}$.

Exercice 1295  *Mines 2022 et 2023* Soit $\alpha > 0$.
a) Montrer l'existence d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X telle que $\forall t \in [0, 1],\ G_X(t) = \dfrac{1}{(2 - t)^\alpha}$.
b) Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$. c) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Les incontournables

Exercice 1296  *Centrale 2015, Mines 2019, X 2015, 2019, 2021, Ens 2022*
Soit Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de l'équiprobabilité et X le nombre de points fixes d'une permutation $\omega \in \Omega$. Quelle est l'espérance et la variance de X ?

Exercice 1297  Au rez-de-chaussée d'un building de n étages, m personnes montent dans l'ascenseur. Quelle est l'espérance du nombre d'arrêts ?

Exercice 1298  *X 2015*
On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'on obtienne la séquence pile-face. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

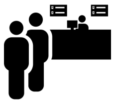
Exercice 1299  *Mines 2016*
Soient p un entier supérieur ou égal à 2, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables *i.i.d.* de loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$. On pose $M_n = \max\{U_1, \ldots, U_n\}$. Déterminer la loi de M_n et la limite de la suite $(\mathbb{E}(M_n))_{n \geqslant 1}$.

Exercice 1300  *Mines 2015, 2016 et 2022, X 2017 et 2022*

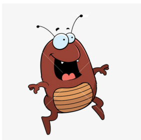
Un promeneur ramasse un nombre N de champignons où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'un champignon est un bolet avec probabilité p et une amanite[2] avec probabilité $(1-p)$. On note X la loi du nombre de bolets ramassés, Y la loi du nombre d'amanites ramassées.

a) Déterminer la loi conjointe de (N, X). En déduire la loi de X.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1301  *Centrale 2016*

Trois clients arrivent dans une banque disposant de deux guichets. Les clients C_1 et C_2 vont aux deux guichets, le client C_3 va dans le premier guichet libéré. Le temps passé au guichet par le client C_i suit une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que le client C_3 termine le dernier.

Exercice 1302  *Mines 2015 et 2017*

Une puce se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ en partant de 0. On note $p \in]0,1[$ la probabilité qu'elle fasse un saut à droite, $q = 1-p$ la probabilité qu'elle fasse un saut à gauche. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse au bout de n déplacements. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 1303  *Ens 2016 et 2019, Mines 2017, X 2018*

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, M_n la matrice aléatoire $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Calculer $\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}\left((M_n)^k\right)\right)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Calculer $\mathbb{E}\left(\det(M_n)\right)$ et $\mathbb{E}\left((\det M_n)^2\right)$.

c) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Montrer que $\mathbb{P}\left(|\det(M_n)| \geqslant f(n)\sqrt{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1304  *Mines 2018 et 2019*

Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Il relance les dés qui n'ont pas donné 6. On note S_n le nombre de 6 obtenus jusqu'au n-ième lancer.

a) Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(S_n = N)\right) = 1$.

c) On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = N\}$. Déterminer la loi de T. Montrer que T admet une espérance. Calculer $\mathbb{E}(T)$ pour $N = 5$.

---

2. Il en existe plus de 550 espèces. La plupart sont non-comestibles, toxiques, et même mortelles.

Exercice 1305  *Mines 2015*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ le tirage infini de Bernoulli et $r \geqslant 1$ un entier strictement positif fixé. On définit sur Ω une variable aléatoire discrète T_r à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui associe à ω le rang du r-ième 1 de ω s'il existe, et $+\infty$ s'il n'y a pas plus de $r-1$ indices n tels que $\omega_n = 1$. Par exemple, pour $r = 1$, $T_1(\omega)$ est le rang d'apparition du premier 1 de la suite ω.
Ainsi, $T_1(0,0,1,0,0,1,1,1,1,\dots) = 3$ et $T_2(0,0,1,0,0,1,1,1,1,\dots) = 6$. Il s'agit bien d'une v.a.d.
a) Déterminer la loi de T_r.
b) Déterminer son espérance, sa variance.
c) Montrer que si S_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (étendue à $\mathbb{N}$) alors $\mathbb{P}(T_r \leqslant k+r) = \mathbb{P}(S_{k+r} \geqslant r)$.

Exercice 1306  *Ens 2016, Mines 2018, X 2018 et 2019, Centrale 2022*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1,1\}$.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute partie bornée A de $\mathbb{R}$,
la série $\sum \mathbb{P}(Y_n \in A)$ converge.

Exercice 1307  *X 2018 : Théorème de Weierstrass, Ens 2019, Mines 2022*

1. Soit f une fonction continue définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, soit n un entier naturel non nul, et soit $x \in [0,1]$.
   On pose $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynômes de Bernstein).
   (a) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$.
      i. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.
      ii. Soit la variable aléatoire $f(\dfrac{S_n}{n})$, montrer que son espérance vérifie : $\mathbb{E}\left(f(\dfrac{S_n}{n})\right) = B_n(f)(x)$
   (b) Montrer que si f est continue sur un segment, alors f est uniformément continue.
      i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
      On pose $\begin{cases} I_1 &= \{k \in [\![0,n]\!], |\dfrac{k}{n} - x| \leqslant \alpha \\ I_2 &= \{k \in [\![0,n]\!], |\dfrac{k}{n} - x| > \alpha \end{cases}$
      i. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k\in I_2} \left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right) \mathbb{P}(S_n = k)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty\, \mathbb{P}\left(|\dfrac{S_n}{n} - x| > \alpha\right)$.
      ii. Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$
2. En déduire le théorème de **Weierstrass**

Exercice 1308  *X 2019, Ens 2022*

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. réelles mutuellement indépendantes.
On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$.
b) On suppose que, pour tout k, X_k est de la forme $a_k Y_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ et Y_k une v.a. à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y_k = -1) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = \dfrac{1}{2}$, les $(Y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ étant une famille de v.a. mutuellement indépendantes.

(i) Calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$.

(ii) On pose $\sigma_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) \leqslant \exp(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2})$.

(iii) En déduire que $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2})$

c) On lance une pièce équilibrée un million de fois. Majorer la probabilité d'obtenir au moins 510 000 fois pile.

Exercice 1309  *Inégalité de Hoeffding, X 2019*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, Z une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ et centrée.

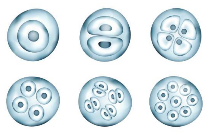
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tZ}) \leqslant \exp\left(\frac{(b-a)^2 t^2}{8}\right)$.

Exercice 1310  *X 2023*

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \leqslant e^{x^2/2}$.

b) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\lambda^2/2n}$.

Exercice 1311  *Centrale 2022*

À chaque génération, une cellule se divise en deux avec une probabilité p ou meurt avec une probabilité $1-p$. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de cellules à la génération n.

a) Déterminer la loi de X_1 et de X_2, puis déterminer $X_n(\Omega)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction génératrice de X_n. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1} = g_n \circ g_1$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 1312  *Mines 2018, 2019, 2021 et 2022*

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbf{P}(T = n \,|\, T \geqslant n)$. On dit que (θ_n) est un taux de pannes.

a) Montrer que les θ_n sont dans $[0, 1[$.

b) Exprimer $\mathbf{P}(T \geqslant n)$ en fonction des θ_k. Montrer que la série $\sum \theta_n$ diverge.

c) Réciproquement, si (θ_n) est une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge, montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$ et $\mathbf{P}(T = n \,|\, T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1313  *X 2017, Ens 2018*

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit que X est symétrique si $X \sim -X$.

a) Soient X_1, X_2 des variables symétriques. A-t-on forcément $(X_1, X_2) \sim (X_1, -X_2)$?

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, symétriques, à valeurs réelles. On pose, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

Si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, montrer que $(S_1, \dots, S_k, S_n) \sim (S_1, \dots, S_k, 2S_k - S_n)$.

Exercice 1314  *Mines 2016 et 2022*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_n, Y_n suivant la loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$.

a) Calculer l'espérance E_n et la variance V_n de $Z_n := |X_n - Y_n|$.

b) Déterminer la limite de chaque suite (E_n) et (V_n).

Exercice 1315  *Mines 2021*

On lance indéfiniment un dé à n faces. On note, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, T_k le nombre de lancers qu'il a fallu pour obtenir une k^{e} face lorsqu'on en a déjà obtenu $k-1$ différentes.

a) Déterminer la loi de T_k.

b) Combien de lancers faudra-t-il en moyenne pour obtenir n faces différentes ? En donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Les autres

Exercice 1316  *Centrale 2023*

On dispose d'une pièce donnant pile avec un probabilité $p \in \,]0,1[$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pile. On note N le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier pile.

On lance ensuite N fois cette pièce et on note X le nombre de pile obtenus au cours de ces N lancers.

a) Quelle est la loi de N ? Donner la loi du couple (N, X).

b) En déduire la loi de X.

c) Soit $\lambda \in \,]0,1[$. Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$. Trouver λ tel que $UV \sim X$.

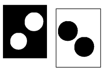
d) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 1317  *X 2018*

On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes.

On suppose que $r \in \{1, \dots, 2n-1\}$ personnes décèdent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.

Exercice 1318  *X 2019, Centrale 2022* On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité pour que la somme des résultats obtenus soit divisible par 5.

Exercice 1319  *Mines 2022*

On dispose de deux urnes. À l'instant 0, l'urne 1 contient deux boules noires, l'urne 2 contient deux boules blanches. À chaque étape, on tire une boule au hasard dans chaque urne, puis on change d'urne chaque boule tirée. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches contenues dans l'urne 2 à l'issue de la n-ième étape. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) & \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$.

a) Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = A u_n$.

b) Calculer la limite de $(\mathbb{E}(X_n))$.

Exercice 1320  *X 2016*
Cinq compères sont autour d'une table ronde. Deux voisins ont chacun un ballon. À chaque tour, une personne ayant un ballon le donne à son voisin de gauche ou à son voisin de droite avec une probabilité égale à $1/2$. Déterminer le nombre moyen de tours nécessaires pour qu'une personne ait les deux ballons.
Ind. On pourra considérer la distance $d_n \in \{0, 1, 2\}$ entre les deux ballons.

Exercice 1321  *Centrale 2016, 2017 et 2018* On considère $2n$ boules, n d'entre elles portant le numéro 0, les autres étant numérotées de 1 à n. On pioche simultanément n boules. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la boule numérotée i a été piochée, à 0 sinon.
a) Déterminer la loi de X_i, la covariance de (X_i, X_j) pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
b) Soit $S = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbf{V}(S)$.

Exercice 1322  *Mines 2018*
On dispose de p boules que l'on place aléatoirement dans n tiroirs $T_1, \ldots, T_n$.
a)Déterminer la loi du nombre X_k de boules situées dans T_k.
b) Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
c) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs vides. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 1323 Deux élèves de 

: Spoirwoman et Spoirman s'attaquent à n exercices de la feuille d'exercices variables et aléatoires (mais discrets) pour passer au tableau en TD. Chaque exercice est, de manière indépendante et équiprobable, soit résolu magistralement au tableau par Spoirwoman, soit résolu par Spoirman ou n'est pas résolu.
On note X : le nombre d'exercices résolu[3] par Spoirwoman et Z le nombre d'élèves (parmi Spoirwoman et Spoirman) n'étant pas passé au tableau.
Déterminer la loi conjointe de (X, Z).
En déduire la loi de Z.

Exercice 1324  *Mines 2015 et 2017*
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U_0, \ldots, U_p$ des urnes, l'urne U_k contenant k boules blanches et $p - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, on tire $n \in \mathbb{N}^*$ boules avec remise et on note N_p le nombre de boules blanches tirées.
a) Déterminer la loi de N_p et l'espérance de N_p.
b) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $P(N_p = k) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$.
c) En déduire la limite en loi de $(N_p)_{p \geqslant 1}$.

---

3. magistralement

Exercice 1325  *X 2019*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul à coefficients positifs ou nuls. On pose $f : x \mapsto \exp\left(P(x)\right)$.
a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence $+\infty$.
b) On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que les b_n sont positifs ou nuls.
c) Pour $x > 0$, soit X_x la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbb{P}(X_x = n) = \dfrac{b_n x^n}{f(x)}$.
Soit $x > 0$. Exprimer $\mathbb{E}(X_x)$ et $\mathbb{V}(X_x)$ à l'aide de P.
d) Soit $d \in \mathbb{R}^+$ tel que $2d > \deg(P)$. On pose, pour $x > 0$, $I_x = \left\{n \in \mathbb{N},\ |n - x\,P'(x)| \geqslant x^d\right\}$. Soit $g_d : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\sum_{n \in I_x} b_n x^n$. Montrer que $g_d(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(f(x)\right)$.

Exercice 1326  *X 2016*

Soit μ une variable aléatoire telle que $P(\mu = 0) = P(\mu = 1) = P(\mu = 2) = 1/3$. On note Z_n le cardinal d'une population d'individus à l'instant n. On suppose que $Z_0 = 1$ et que, à l'étape n, un individu a un nombre de descendants suivant la loi de μ puis meurt.
a) Déterminer Z_1 et Z_2.
b) Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$. On pose : $E\left(Z_{n+1} \mid Z_n = N\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\ P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = N)$. Montrer que $E(Z_{n+1} \mid Z_n = N) = N$.
c) On note $\varphi(t)$ la fonction génératrice de μ. On admet que la fonction génératrice de Z_n est $G_{Z_n} : t \mapsto \varphi \circ \cdots \circ \varphi(t)$ (composée n fois). Déterminer la probabilité d'extinction de la population.

Exercice 1327  *X 2016*

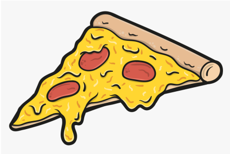
Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $a + b = 1$.
a) Montrer que la série de terme général $\binom{2n}{n} a^n b^n$ diverge si et seulement si $a = b = 1/2$.
On se place sur l'axe $\mathbb{Z}$ initialement en 0. On a une probabilité a d'aller à droite, b d'aller à gauche à chaque instant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n. On pose $R : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $P : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.
b) Montrer que P et R sont définies sur $]-1, 1[$.
c) Montrer, pour $t \in]-1, 1[$, $R(t) = 1 + R(t)\,P(t)$.
d) Montrer que la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si $a = b$.

Exercice 1328  *Loi binomiale négative*

On souhaite étudier le temps d'attente du m-ème succès dans une série d'expériences aléatoires indépendantes ayant une même probabilité $p \in [0, 1]$ de réussite. On note $(X_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de variables de Bernoulli modélisant la succession des expériences. Le temps d'attente du m-ème succès définit une variable aléatoire T_m déterminée par

$$T_m = n \iff X_1 + \ldots + X_n = m \text{ et } X_1 + \ldots + X_{n-1} < m$$

a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de T_1.
b) Même question avec $T_m - T_{m-1}$ pour $m \geqslant 2$.
c) Déterminer la fonction génératrice de T_m puis la loi de T_m.

Exercice 1329  *Mines 2016* Soit N le nombre d'appels arrivant un certain jour chez *Bolzano's Pizza*[4]. Soit X_i le nombre de pizzas commandées lors du i-ème appel et Y le nombre total de pizza commandées ce jour-là.
a) Montrer que $G_Y = G_N \circ G_X$. b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$.
c) On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Quel est la loi de Y lorsque $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$?

Exercice 1330 *Ens 2019*  On considère des voitures de longueur 2 et un parc de stationnement à n places symbolisé par $\{1, 2, ..., n\}$.
À chaque fois qu'une voiture arrive, on tire au hasard un nombre entre 1 et $n-1$ et la voiture se gare (si possible) sur les emplacements i, $i+1$. On continue jusqu'à ce qu'aucune voiture ne puisse se garer. Donner une estimation asymptotique du nombre d'emplacements libres à l'issue de ce processus quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 1331  *Centrale 2015*
Soit X une variable aléatoire. On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z telles que $Y+Z$ ait la même loi que X.
a) Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z.
b) Soient $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, montrer que X est décomposable.
c) Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right)\left(\dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{j=0}^{s-1} t^{rj}\right)$.
En déduire que X est décomposable.
d) On suppose que $n \geqslant 3$ est premier. Soit X suivant une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que X n'est pas décomposable.

Exercice 1332  *X 2017, 2020, Mines 2023*
Soient X, Y deux va strictement positives telles que $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim Y$.
Montrer que $\mathbb{E}\left(X/Y\right) \geqslant 1$. À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 1333  *X 2020* Soient $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, $p \in]0,1[$. On considère k joueurs. Chacun des joueurs lance au plus n fois une pièce donnant pile avec la probabilité p et s'arrête lorsqu'il obtient pile. Le nombre de points est égal au nombre de face obtenus (il marque n points s'il n'obtient jamais pile).
a) Déterminer la loi du nombre de points obtenus par un joueur donné.
b) Le gagnant est celui ou ceux ayant le moins de points. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul gagnant.

---

4. Bolzano et Weierstrass, voyant leur collaboration fructueuse, décidèrent de s'associer pour ouvrir une pizzeria. Toutefois, ils ne lui donnèrent que le nom de Bolzano, craignant que "Weierstass Pizza" ne soit pas très vendeur...

Exercice 1334 Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit $m \in [a, b]$ et X une v.a.r. à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance m. Montrer que $V(X) \leqslant (b - m)(m - a)$ et que cette inégalité est optimale.

Exercice 1335 *Mines 2015* Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On suppose $V(X) > 0$. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ minimisant $\mathbb{E}\left((Y - aX - b)^2\right)$.

Exercice 1336 *X 2021*

Soient Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble D, f et g deux fonctions croissantes et bornées de D dans $\mathbb{R}$.

Justifier l'existence de $\operatorname{cov}(f(Y), g(Y))$ et montrer qu'elle est positive.

Exercice 1337 Soient X et Y deux v.a.d. réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, X prenant N valeurs distinctes, et Y prenant M valeurs distinctes. On suppose que, pour toutes fonctions polynomiales f de degré strictement inférieur à N et g de degré strictement inférieur à M, $\operatorname{Cov}(f(X), g(Y)) = 0$.

Montrer que les v.a.d X et Y sont indépendantes.

Exercice 1338 *Mines 2016*

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soient $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1\}$ et $Y = X_{N+1} + \cdots + X_{2N}$.

a) Déterminer la loi de N.

b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 1339 *Ens 2023*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère dans le plan un graphe non orienté aléatoire de n sommets. On note $X_{i,j} = 1$ si les points d'indices i et j sont reliés, et 0 sinon. On suppose les $X_{i,j}$ indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. On note T_n le nombre de triangles formés par ces n points. On pose $a_n = \binom{n}{3} p^3$.

Calculer $\mathbf{E}(T_n)$ et montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 1340 *X et Mines 2015, Centrale 2018* Une urne contient une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches, les autres boules étant noires. On effectue des tirages avec remise. Soient X la variable aléatoire donnant la longueur de la première série de boules d'une même couleur, Y la variable aléatoire donnant la longueur de la deuxième série de boules de la même couleur.

a) Donner la loi de (X, Y).

b) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

c) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

e) Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 1341 *Mines 2016, X 2015 et 2017*
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux faces consécutifs dans un jeu de pile ou face, dans lequel la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

Exercice 1342 *Centrale 2015*
Une urne contient 3 boules numérotées de 1, 2 et 3.
On tire successivement une boule avec remise et on définit X la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel on obtient trois fois de suite la même boule.
Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 1343 *Ens 2018*
Soit Σ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$.
Si $k \in \{2,\dots,n\}$ et si σ est une permutation de $\{1,\dots,n\}$, on dit que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ est une sous-suite strictement croissante de longueur k de σ si $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)$.
On note Y_k le nombre de sous-suites strictement croissantes de longueur k de Σ.
Déterminer l'espérance de Y_k.

Exercice 1344 *X 2015 et 2019*
Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit que X est symétrique si $X \sim -X$.
a) Soient Y et Y' deux variables aléatoires telles que $Y \perp\!\!\!\perp Y'$, $Y \sim Y'$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que $Y - Y'$ est symétrique.
Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
b) Montrer que $F_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$ définit une fonction sur $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F_X pour que X soit symétrique.
c) On suppose X symétrique. Soit ε une variable indépendante de X telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Montrer que εX et X ont même loi.

Exercice 1345 *X 2018 et 2023*
Soient $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geqslant 3$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Soit $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $\{0/q, 1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q\}$.
On pose $T_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n + \tau + \sin\left(2\pi\left(T_n - \theta_n\right)\right)$.
Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1346 *X 2020*
Soient $m \geqslant 2$, $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., m\}$. On pose

$$J = \min\{i \in \mathbb{N}^*,\ U_{i+1} \neq U_i\}$$

a) Déterminer la loi de J.
Soit (J_i) une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de J.
b) Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbb{P}(\max\{J_1, ..., J_{m^k}\} \leqslant k)$.

Exercice 1347  *X 2020* Soient $N \geqslant 2$, $X_1, ..., X_N$ des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$. On pose

$$M_N = \min\{|X_{i+1} - X_i|,\ i \in \{1, ..., N-1\}\}$$

a) Montrer que la suite de terme général $\mathbb{P}(M_N = 0)$ converge et déterminer sa limite.
b) Montrer que la suite de terme général $\mathbb{E}(M_N)$ est bornée.

Exercice 1348  *Centrale 2022*
On dispose de N trous, chacun aussi profond que nécessaire. On jette aléatoirement n balles successivement dans ces trous. Chaque balle a la même probabilité de tomber dans les différents trous, et les lancers sont indépendants. On note T_n la variable aléatoire donnant le nombre de trous contenant au moins une balle.
a) Déterminer les valeurs que prend la variable T_n (en fonction de n et N).
b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer en utilisant la formule des probabilités totales que

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N+1-k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k-1).$$

c) Montrer que T_n possède une espérance, et la calculer.

Exercice 1349  *Ens 2021*
Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Soit enfin $N = \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^* \ ;\ S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
a) Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. En déduire $\mathbb{E}(N)$.
b) Montrer que N est presque sûrement égale à $+\infty$.

Exercice 1350  *Mines 2023*
On dispose d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, U_3, \ldots$ telles que l'urne U_n contient n boules noires et une boule blanche. On retire au hasard une boule de l'urne U_1. Si elle est blanche, on s'arrête. Sinon, on tire une boule au hasard de l'urne U_2. Si elle est blanche, on s'arrête. Sinon on tire une boule de l'urne U_3. On poursuit ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche.
Soit X le nombre de tirages faits pour obtenir une boule blanche.
a) Déterminer la loi de X.
b) Montrer que $Y = \left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor$ a une espérance finie et la calculer.

Exercice 1351  *X 2020, Mines 2021*
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées et admettant un moment d'ordre 4.
a) Montrer qu'il existe C tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left(\frac{(X_1 + X_2 + ... + X_n)^4}{n^2}\right) \leqslant C.$$

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mathbb{P}\left(\dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} > \varepsilon\right)$ converge.

Exercice 1352 *Ens 2023*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que $\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_1=1)\neq 0$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
Montrer que $\mathbf{P}(4 \text{ divise } S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

Exercice 1353 *X 2017*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de X.
On pose $S_0=0$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $N_n=\operatorname{Card}\{S_k,\ k\in\{0,\dots,n\}\}$.
Soit enfin $A=\bigcap_{j\geqslant 1}(S_j\neq 0)$.
a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}\left(S_{n+1}\notin\{S_0,\dots,S_n\}\right)=\mathbb{P}\left(S_1\neq 0,\dots,S_{n+1}\neq 0\right)$.
b) Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{N_n}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathbb{P}(A)$.

Exercice 1354 *Mines 2018 et 2019*

Soient $X \perp\!\!\!\perp Y$ avec, $X\sim\mathcal{G}(p)$, $Y\sim\mathcal{G}(q)$ avec $p,q\in]0,1[$. Calculer $\mathbb{P}(Y>X)$.

Exercice 1355 *Ens 2017*

Soient $p\in]0,1[$ et $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre p. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\min\{X_1,\dots,X_n\}$ et $Z_n=\max\{X_1,\dots,X_n\}$, $\alpha_n=E(Y_n)$ et $\beta_n=E(Z_n)$.
a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
b) Exprimer α_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

Exercice 1356 *Ens 2023*

Soient X,Y deux variables aléatoires entières indépendantes qui suivent la même loi.
a) On suppose que X suit une loi géométrique commençant à zéro, c'est-à-dire qu'il existe $p\in\,]\,0\,;1\,[$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X=k)=(1-p)^k p$.
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in[\![0\,;\,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=k\,|\,X+Y=n)=\frac{1}{n+1}$.
b) Prouver la réciproque.

Exercice 1357 *Centrale 2023*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ. On pose $M=\begin{pmatrix}(-1)^X & 1\\ (-1)^Y & 1\end{pmatrix}$.
a) Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.
b) Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1358 *Centrale 2022*

Soit $a\in\mathbb{N}^*$, X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p\in$

$]0,1[$. On pose $M_a = \begin{pmatrix} 2X & -2aY \\ X & -aY \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est la probabilité que f_a, l'endomorphisme canoniquement associé à M_a, soit un projecteur ?

Exercice 1359 *Ens 2021*

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

On définit la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note A l'événement « M est diagonalisable ».

Montrer qu'il existe $c > 0$, indépendant de λ, tel que $\mathbb{P}(A) \leq c/\lambda$.

Exercice 1360 *Mines 2017, 2021 et 2023*

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p et q respectivement. Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1361 *X 2019* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On note A l'événement : la matrice $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible.

Montrer que $\mathbb{P}(A) \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 1362 *Mines 2023*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On pose $U = (X_1, ...X_n)$, $V = (Y_1, ..., Y_n)$ et $M = U^T V$.

a) Déterminer la loi du rang de M.

b) Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?

c) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Exercice 1363 *Mines 2023*

Soit $M = (X_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une matrice aléatoire réelle où les $(1 + X_{ij})$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in [0,1[$.

a) Calculer la probabilité pour que M soit symétrique.

b) Calculer la probabilité pour que M soit orthogonale.

Exercice 1364 *Ens 2023*

On considère une matrice aléatoire $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times n$ qui est symétrique, où chaque variable aléatoire $m_{i,j}$ suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et où les variables aléatoires $(m_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ sont indépendantes.

a) Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M))$, $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^2))$ et $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^3))$.

b) Montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^4)) = \mathcal{O}(n^3)$.

c) On note λ_1 la plus grande valeur propre de M. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(\lambda_1 \geqslant n\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 1365  *Mines 2017, 2019 et 2023*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $N = n!$, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1,\dots,N\}$, $p_1 < \cdots < p_m$ les nombres premiers inférieurs à n.

a) Calculer $\mathbb{P}(p_k|X)$ pour $k \in \{1,\dots,m\}$.

b) Montrer que les événements $(p_1|X)$, $(p_2|X)$,..., $(p_m|X)$ sont mutuellement indépendants.

c) Soient $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ deux variables aléatoires suivant la loi de X. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 \wedge X_2 = 1)$.

Exercice 1366  *Mines 2022*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. On munit $\mathcal{F}(E,E)$ de la loi uniforme. Pour $k \in E$, on note X_k l'indicatrice de l'événement $(k \in f(E))$, et Y la variable aléatoire donnant le cardinal de $f(E)$.

a) Déterminer la loi de X_k.

b) Déterminer l'espérance de Y.

c) Pour k, ℓ distincts dans E, déterminer la covariance de X_k et X_ℓ.

Exercice 1367  *Ens 2023*

On considère deux capteurs indépendants, qui détectent chacun en moyenne 5000 événements par an. Quelle est la probabilité que les deux détecteurs détectent un événement pendant la même seconde ?

Exercice 1368  *X 2020*

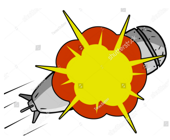
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d de variables aléatoires suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(t)$ avec $t > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Soit $T \in \mathbb{R}_+$. Expliciter $\mathbb{P}(\dfrac{S_n}{n} \leqslant T)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\dfrac{S_n}{n} \leqslant T) = \begin{cases} 0 \text{ si } T < t \\ 1 \text{ si } T > t \end{cases}$

Exercice 1369  *Mines 2017*

Le nombre de voitures allant à (resp. venant de) Paris qui s'arrêtent à un barrage filtrant en une journée est une variable aléatoire X (resp. Y) qui suit une loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ). Soient $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leqslant n$. Si n voitures ont été arrêtées au barrage dans la journée quelle est la probabilité que k voitures soient allées à Paris ?

Exercice 1370  *Ens 2022*

On lance une fusée sachant que la probabilité de la voir se crasher vaut 2%.

a) Déterminer le nombre minimal n de lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un crash sur les n lancers dépasse $1/2$.

b) Existe-t-il un entier N de lancers tel que la probabilité d'observer au moins dix crashs parmi les N lancers soit supérieure à 0.9 ? Justifier.

Exercice 1371  *X 2015, Centrale 2015 et Centrale 2017*
Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant n \leqslant N$. Dans un étang, il y a n brochets (identiques) et $N-n$ carpes (identiques). Un pêcheur pêche un poisson et le rejette juste après.
a) Quelle est la probabilité que le pêcheur ait pêché n brochets après n prises ?
b) Quelle est la probabilité que le pêcheur ait pêché n brochets après $(n+1)$ prises ?
c) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Soit X_i le nombre de prises nécessaires afin d'obtenir i brochets. Déterminer la loi de X_i.

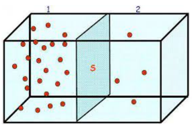
Exercice 1372  On considère une suite infinie de v.a.d. X_n, $n \geqslant 1$ de Bernoulli indépendantes.
a) Notons L_1 la longueur de la première série :

$$L_1 = \min\{n, X_{n+1} \neq X_1\}.$$

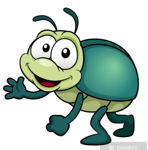
Montrer que L_1 est presque sûrement finie. Déterminer sa loi, son espérance, sa variance.
b) Notons L_2 la longueur de la deuxième série :

$$L_2 = \min\{k, X_{L_1+k+1} \neq X_{L_1+1}\}.$$

Déterminer la loi de (L_1, L_2), la loi de L_2, son espérance, sa variance.
c) L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? On admet l'existence de la covariance de L_1 et L_2. Son signe est-il prévisible ?

Exercice 1373  *X 2020*
Un réservoir est divisé en deux compartiments séparés par une membrane, et contient $2N$ particules. À chaque unité de temps, une particule, prise au hasard, change de compartiment. Au temps t $= 0$, il y a N_1 particules dans le premier compartiment, et $2N - N_1$ dans le second. On note X_k le nombre de particules dans le premier compartiment au temps k.
a) Exprimer la loi de X_{k+1} en fonction de la loi de X_k.
b) Exprimer $\mathbb{E}(X_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
c) En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1374  *Mines 2015*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \ldots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.
a) Déterminer la loi de (X, Y), l'espérance de Y.
b) A-t-on $X \perp\!\!\!\perp Y$?
c) Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 1375  *Mines 2018* On considère une puce, située en $x = 0$ à $t = 0$ et qui, à intervalles réguliers, saute à gauche avec une probabilité g, saute à droite avec une probabilité d et reste au même endroit avec une probabilité r, de sorte que $g + d + r = 1$.
On note X sa position après n étapes. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Exercice 1376 *Mines 2016*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $X \leqslant Y$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'événement $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $Y - X + 1$ et X suivent la même loi.

Exercice 1377 *X 2020*

a) On considère une cible de rayon 1. Pour $n \geqslant 2$, on découpe la cible en n couronnes d'épaisseur $C_{i,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{i-1}{n} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{i}{n}\}$. On note X_n une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ telle que, pour tout i, $\mathbb{P}(X_n = i)$ soit proportionnelle à l'aire de $C_{i,n}$. Déterminer la loi de X_n.

b) Soit $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante de limite $+\infty$. Montrer que $\mathbb{E}(g(X_n)) \longmapsto +\infty$.

c) Soit $h \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer $\mathbb{E}(h(\dfrac{X_n}{n}))$ et la limite éventuelle de $(\mathbb{E}(h(\dfrac{X_n}{n}))_{n \geqslant 1}$.

Exercice 1378 *Mines 2023*

a) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Caractériser les événements A indépendants de tout événement B.

Soit Ω un ensemble contenant $N \in \mathbb{N}^*$ éléments.

b) Existe-t-il une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que tous les événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ soient mutuellement indépendants ?

c) On considère n événements $A_1, ..., A_n$ mutuellement indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{P}(A_i) \in]0, 1[$.

Montrer que $2^n \leqslant N$.

Exercice 1379 *Mines 2022* Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

a) Montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire discrète X à valeurs complexes telle que X et $X + \lambda$ aient la même loi.

b) Déterminer les variables aléatoires discrètes X à valeurs complexes telles que X et λX aient la même loi.

Exercice 1380 *X 2023*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que Y prenne un nombre fini de valeurs, et $\mathbf{E}(Y) = 0$. On suppose que $|X|$ admet une espérance.

Montrer que $\mathbf{E}(|X - Y|) \geqslant \mathbf{E}(|X|)$.

Exercice 1381 *X 2019*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et que $\mathbb{E}(X) \geqslant a$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda a) \geqslant (1 - \lambda)^2 a^2$.

Exercice 1382 *X 2019*

Soient c et λ deux éléments de $]0, 1[$, $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $X_0 = c$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)x + \lambda \,|\, X_n = x) = x, \ \mathbb{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)x \,|\, X_n = x) = 1 - x.$$

a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, X_n est presque sûrement à valeurs dans $]0,1[$ et que l'ensemble $\{x \in]0,1[\ ;\ \mathbb{P}(X_n = x) > 0\}$ est de cardinal majoré par 2^n.
b) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
c) Montrer qu'il existe $\mu_2 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathbb{E}({X_n}^2) - c| \leqslant \exp(-\mu_2 n)$.
d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\mu_p > 0$ et $m_p > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathbb{E}({X_n}^p) - c| \leqslant m_p\ \exp(-\mu_p n)$.
e) Si $t \in \mathbb{R}^{+*}$, quelle est la limite de la suite $(\mathbb{E}(t^{X_n}))_{n \geqslant 0}$?

Exercice 1383 Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1,n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$.
On pose $S = X_1 + ... + X_n$ et $m = p_1 + ... + p_n$.
a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et soit $t > 0$, montrer que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant e^{p(e^t - 1)}$.
b) Soient t et δ, des réels strictement positifs, montrer que $\mathbb{P}(S \geqslant m(1+\delta)) \leqslant \dfrac{e^{m(e^t-1)}}{e^{m(1+\delta)t}}$
c) En déduire l'inégalité de Chernoff[5] : $\mathbb{P}(S \geqslant m(1+\delta)) \leqslant \left(\dfrac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^m$

Exercice 1384 Montrer, grâce à l'inégalité bienaimée de Tchebyshev, que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geqslant \frac{n-1}{n} 2^{4n}$.

Exercice 1385 *Ens 2018* Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On pose $d(X,Y) = \sup\limits_{A \subset \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A))$. Soit $B = \{k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$.
a) Montrer que $d(X,Y) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y)$.
b) Montrer que $d(X,Y) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$.
c) Montrer que $d(X,Y) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$.

Exercice 1386 *Mines 2023*
a) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements. Montrer que B : « Il existe un rang à partir duquel A_n est vraie » est un événement et que $B = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geqslant n} A_k\right)$.
b) Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles de même loi que X.
On suppose $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^4) < +\infty$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
() i) Calculer $\mathbf{E}({S_n}^4)$ en fonction de n, $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(X^4)$.
() ii) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k \geqslant n} \left(\left|\frac{S_k}{k}\right| \leqslant \varepsilon\right)\right) = 1$ et que, presque sûrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$.

Exercice 1387 *Ens 2018* a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.
Montrer que les racines de P sont toutes négatives ou nulles si et seulement si les coefficients de P sont tous de même signe.
b) Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ de degré n.

5. Herman Chernoff, né en 1923, mathématicien et physicien américain, professeur au M.I.T.

On suppose qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ telle que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y_n = k)\, X^k$.
Montrer que Y_n suit la même loi qu'une somme de n variables de Bernoulli indépendantes.
c) Soit $(P_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de polynômes vérifiant les hypothèses de b).
On suppose que $P_n'(1)/n \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$.
Montrer que (Y_n) vérifie une loi des grands nombres.

Exercice 1388 *X 2015*

a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une unique façon $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k 2^k$ avec $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = 1/2^{n+1}$.
On suppose que $X = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n 2^n$ où les X_n sont des variables de Bernoulli. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 1389 *Centrale 2021, Mines 2023*
Soit X une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre 2.
a) Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$, $g(x) \geqslant b$.
Montrer que $\mathbb{P}(X \in I) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(g(X))}{b}$.
b) On suppose que X est une variable centrée d'écart-type σ.
En considérant $g(x) = (x + \varepsilon)^2$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X > t) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$.
c) On suppose X à valeurs positives. Montrer que $t \longmapsto \mathbb{P}(X > t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 1390 *Ens 2019*
Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}\left(A \cap (X_k = 1)\right) \in]0, p[$.

Exercice 1391 Si X et Y sont deux v.a.d. réelles indépendantes telles que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$, montrer qu'il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a \leqslant Y) = 1$.

Exercice 1392 *Ens 2015*
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans une partie dénombrable de $[0, 1]$. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.

Exercice 1393 *Ens 2017*
Soit $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On suppose que, pour tout k, $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k X^k$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{P}_n(\alpha)$ la probabilité que α soit racine de Q_n.

a) Calculer $\mathbb{P}_n(1)$. Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}_{2n-1}(1)$.
b) Calculer $\mathbb{P}_n(i)$.
c) Calculer $\mathbb{P}_n(j)$. Montrer que $\mathbb{P}_n(j) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1394 *Ens 2016 et 2022*
Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On dit que λ est une valeur médiane si $\mathbb{P}(X \leqslant \lambda) \geqslant 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \geqslant 1/2$.
a) Montrer qu'il existe une valeur médiane. Est-elle forcément unique ?
b) Trouver t minimisant $t \mapsto \mathbb{E}\left((X-t)^2\right)$.
c) Trouver t minimisant $t \mapsto \mathbb{E}\left(|X-t|\right)$.

Exercice 1395 *Ens 2019* Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, centrées et admettant une variance. On pose, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Soit $a > 0$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{1}{a^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.
Ind. Considérer la variable aléatoire T telle que $T = \min\{k \in \{1, \ldots, n\},\ |S_k| \geqslant a\}$ si cet ensemble est non vide, $T = 0$ sinon. Montrer que $a^2\, \mathbb{P}(T = k) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\, \mathbf{1}_{T=k}\right)$ si $k \geqslant 1$.

Exercice 1396 *Ens 2016*
a) Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(|X_\lambda - \lambda| \geqslant \varepsilon\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.
b) Soient, pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la limite, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

Exercice 1397 *Ens 2022*
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y et on note $X \leqslant_{st} Y$ si l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(X \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Y \geqslant t\right)$.
a) Montrer que $X \leqslant_{st} Y$ si et seulement si toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée vérifie : $\mathbb{E}\left(h(X)\right) \leqslant \mathbb{E}\left(h(Y)\right)$. b) On considère X et Y et à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, telles que $X \leqslant_{st} Y$. Montrer que : $\mathbb{P}(X \leqslant Y) > 1/2$. Peut-on améliorer ce résultat en mettant $a > 1/2$ au lieu de $1/2$?

Exercice 1398 Un troupeau de N vaches est atteint d'une maladie donnée avec une probabilité p. Pour savoir si une vache est malade, on procède à un test sur un échantillon de lait que l'on suppose fiable. 1ère méthode : effectuer le test sur chaque vache.
2ème méthode : Soit k un entier fixé. (on suppose pour simplifier que k est un diviseur de N). On regroupe les vaches en $\dfrac{N}{k}$ groupes de k individus dont on mélange le lait. On teste ensuite le lait de chaque groupe. Si un groupe s'avère contaminé, on teste individuellement le lait de chaque vache du groupe.
On note X le nombre de test.
a) Calculer $\mathbb{E}(X)$
b) Montrer que pour p proche de 0, on peut choisir k de sorte que la 2ème méthode soit plus avantageuse que la première.

Exercice 1399 *Mines 2021*
Une partie A de $\mathbb{N}$ vérifie *(P)* si, pour tout $k \in A$, un et un seul parmi $k-1$ et $k+1$ est dans A.
a) Quelle est la probabilité pour que (X, Y) vérifie *(P)*, X et Y étant des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson ?
b) Montrer que l'ensemble F des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+3} = u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. Quelle est sa dimension ?
c) On note v_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ vérifiant *(P)*. Montrer que (v_n) vérifie *(P)*.

Exercice 1400 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On cherche à savoir si $A = B$.
On considère pour cela $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ mutuellement indépendantes. On pose X le vecteur colonne ${}^t(X_1, ..., X_n)$.
Montrer que si $A \neq B$ alors $\mathbb{P}(AX = BX) \leqslant \frac{1}{2}$.[6]

Exercice 1401 *Ens 2019*
Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher : pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On note X le vecteur aléatoire ${}^t(X_1, \ldots, X_n)$ et $\delta_V(X)$ la distance de X à V.
a) Dans cette question, $n = 2$ et V est une droite. Déterminer $\mathbb{E}\left(\delta_V(X)^2\right)$.
b) Traiter le cas général pour V de dimension p.

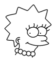
Exercice 1402 Soit E un e.v. euclidien. Soient $v_1, ..., v_n$ des vecteurs de norme $\leqslant 1$. Soient $p_1, ..., p_n \in [0, 1]$. On pose $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i v_i$. Pour toute partie $I \subset \{1, ..., n\}$, on pose $v_I = \displaystyle\sum_{i \in I} v_i$.
On cherche à montrer que l'un des v_I est à distance $\leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ de v.
a) On se donne $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$.
On définit R la v.a.r. $||\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i v_i - v||^2$. Calculer $\mathbb{E}(R)$.
b) Conclure.

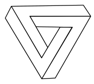
Exercice 1403 *Mines 2023*
On munit l'ensemble Ω, fini à $n \geqslant 2$ éléments, de la loi de probabilité uniforme. On note F l'espace des variables aléatoires réelles sur Ω.
a) Montrer que l'application $(X, Y) \in F^2 \mapsto \mathbb{E}(XY)$ définit un produit scalaire sur F.
b) Déterminer la projection orthogonale de $X \in F$ sur la droite dirigée par la variable 1.

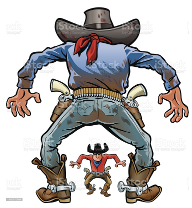
Exercice 1404 *Centrale 2023*
Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2q+1$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note A_k le point d'affixe $z_k = e^{2ik\pi/n}$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, soit B_k le point d'intersection de la droite $(A_0 A_k)$ avec la droite d'équation $x = -1$. Soit W_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$. Soit $Z_n = 2\,\mathrm{cotan}\left(\dfrac{\pi W_n}{n}\right)$.
a) Montrer que l'ordonnée de B_k est égale à $2\,\mathrm{cotan}\left(\dfrac{\pi k}{n}\right)$.

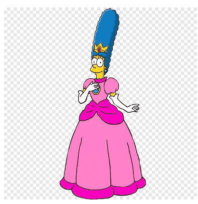
6. Ce résultat est la base d'un algorithme probabiliste dû à Freivald permettant de vérifier le calcul du produit de deux matrices.

b) Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.
c) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(|Z_n|)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 1405  *X 2018*
Soient $\alpha \in]0, \pi[$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n = \alpha) = \mathbb{P}(X_n = -\alpha) = 1/2$.
Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de points de $\mathbb{R}^2$ telle que $A_0 = (0,0)$, $A_1 = (1,0)$ et, pour $n \geqslant 2$, A_{n+1} vérifie $A_nA_{n+1} = 1$ et $\widehat{A_{n-1}A_nA_{n+1}} = X_n$.
Soit R_n la distance euclidienne canonique entre A_0 et A_n. Calculer $\mathbb{E}\left(R_n^2\right)$.

Exercice 1406  *X 2021* Soit (ABC) un triangle orienté. Trois particules sont situées à tout instant en A, B ou C. À l'instant 0 elles sont toutes trois en A. À l'instant n elles peuvent de manière équiprobable rester en place ou tourner dans le sens trigonométrique, ces trois actions étant indépendantes entre elles.
Calculer la probabilité de l'événement : « toutes les particules sont au même endroit à l'instant n ».

Exercice 1407  *Un combat à trois*
Averell, Billy et Chuck se battent dans une ville du Far West. Averell, Billy et Chuck ont respectivement les probabilités $50\%, 80\%$ et 100% d'atteindre leur cible.
L'ordre pour tirer (par exemple 1,2,3) est fixé par tirage au sort. Ensuite, ils tirent dans l'ordre 1,2,3,1,2,3,... (sauf si l'un d'eux vient à être abattu), jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un survivant !
Chacun est libre de choisir sa cible comme il le désire.
Le tirage au sort a désigné Averell comme devant tirer le premier : Quelle est sa meilleure stratégie ?

Exercice 1408 Une princesse  est retenue prisonnière dans un chateau.
Un prince charmant  se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant trois portes. Il en ouvre une au hasard.

- Derrière une porte se trouve un dragon qui dévore le prince s'il l'ouvre.
- Derrière une deuxième porte se trouve la princesse que le prince peut alors délivrer.
- Derrière la troisième porte se trouve une sorcière qui lui fait boire un filtre qui a pour effet de remettre le prince à la porte du château en le faisant oublier la porte qu'il a choisie, de sorte que le prince retente de délivrer la princesse.

Le prince est un homme déterminé et il renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré par le dragon.

1. Calculer la probabilité de l'événement $D_k =$ « il délivre la princesse au k-ème essai. »

2. Calculer la probabilité de l'événement $D =$ « il délivre la princesse . »

3. On note T le nombre de tentatives du prince (c'est à dire le nombre de fois où il est amené à choisir une porte à ouvrir). Donner la loi de T ainsi que son espérance.

4. On note R le nombre d'essais nécessaires pour délivrer la princesse. Si le prince échoue, on convient que $R = 0$. Donner la loi de R ainsi que son espérance.

5. Quelle est la probabilité que le prince recommence indéfiniment ses tentatives ?

6. Si le prince échoue dans sa tâche (et termine donc dans le gosier du dragon), le syndicat des princes envoie immédiatement un autre prince (qui procède suivant les mêmes paramètres), jusqu'à ce que la princesse soit délivrée.
   Calculer le nombre moyen de princes « utilisés » pour délivrer la princesse.