



« Les questions les plus importantes de la vie ne sont, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. » Pierre-Simon de Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 1812

LES BASIQUES



Exercice 1195

X 2017, Mines 2024

Une urne contient une boule blanche et une deuxième boule aléatoire, blanche ou noire, chaque couleur ayant une probabilité $1/2$. On effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.



Exercice 1196

Mines 2015 et 2016

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.



Exercice 1197

Mines 2016, 2018, 2019 et 2024

Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?



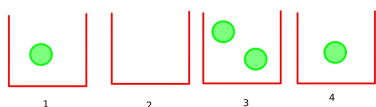
Exercice 1198

X 2018

Soit une pièce avec une probabilité p d'avoir Face.

On la lance N fois, quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de faces ?

LES INCONTOURNABLES



Exercice 1199

X 2016 et 2017

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes numérotées. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide lorsque : a) les boules sont indiscernables b) les boules sont numérotées.



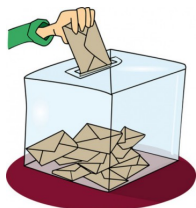
Exercice 1200

X 2019, Centrale 2019, Mines 2022

Est-il possible de piper deux dés pour que la somme des deux dés suivent une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

**Exercice 1201***Centrale 2015 et 2022*

Soit $c \in \mathbb{N}^*$, un joueur entre dans un casino avec une somme au départ de k euros où $k \in \{0, \dots, c\}$. Il joue à une machine à sous qui le fait gagner avec une probabilité $p \in]0, 1[$. S'il gagne, sa fortune augmente d'une unité, s'il perd, elle baisse d'une unité. Le joueur s'arrête quand il n'a plus d'argent ou lorsque sa fortune atteint c . Calculer la probabilité de ruine du joueur. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

**Exercice 1202***X 2015 et 2016*

Deux candidats, K.H. et D.T., s'opposent lors d'une élection aux Etats-Unis. Le résultat est contesté. Dans un bureau de vote de 1000 électeurs d'un comté du New Hampshire, on recompte les bulletins les uns après les autres.

Résultat : D.T. recueille 600 voix et K.H. en recueille 400.

Quelle est la probabilité que D.T. soit resté en tête (strictement) tout au long du dépouillement ?

**Exercice 1203**

On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au total k boules.

L'univers considéré est l'ensemble des fonctions $\Omega = \mathcal{F}(\{1, \dots, k\}, \{1, \dots, n\})$ muni de l'équiprobabilité.

- Soit $j \in \{0, \dots, k\}$, quelle est la probabilité qu'une urne donnée contienne j éléments donnés ?
- Quelle est la probabilité qu'une urne donnée soit de cardinal j ?
- Quelle est la probabilité que chaque urne contienne au plus une boule ?
- Quelle est la probabilité pour qu'une fonction ω de Ω soit injective ?



- Application : Etant donnée une assemblée de k personnes, quelle est la probabilité pour que deux personnes aient le même anniversaire ? (on ne tiendra pas compte des années bissextiles).
 - Quelle est la plus petite valeur de k rendant cette probabilité supérieure ou égale à $1/2$?
 - Si l'on fixe une personne dans l'assemblée, quelle est la plus petite valeur de k pour laquelle la probabilité qu'une autre personne ait le même anniversaire soit supérieure ou égale à $1/2$?
- e) En appliquant la formule du crible, quelle est la probabilité pour qu'une fonction ω de Ω soit surjective ?
-

Exercice 1204*Mines 2022, 2023 et 2024*

- On munit l'ensemble des fonctions $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ de la loi uniforme. Déterminer la probabilité pour que f soit surjective.
 - Même question avec $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n-2 \rrbracket$.
-

Exercice 1205*X 2016, 2019 et 2021*

Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, muni de l'équiprobabilité.

- a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer la probabilité que i soit le point fixe d'une permutation.
 b) Problème des bicornes : n polytechnicien(ne)s se rendent au bal de l'X en grand U. Chaque X dépose son bicorné au vestiaire. Après le bal, aux petites heures du jour, chacune et chacun reprend un bicorné au hasard. Quelle est la probabilité d_n que chaque X reparte avec un bicorné différent de celui qu'elle ou il avait en arrivant. Montrer que cette probabilité tend vers une limite ℓ lorsque $n \rightarrow +\infty$. c) Donner un équivalent de l'erreur $(\ell - d_n)$.
-

**Exercice 1206***Ens 2019*

On munit $\mathcal{S}_n$, l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$, de la distribution uniforme. Déterminer la probabilité p_n pour qu'une permutation de $\mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?

LES AUTRES

**Exercice 1207***Centrale 2017*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $2n$ équipes sportives, n en première division et n en seconde division. On organise n matches.

- (i) Soit a_n la probabilité d'avoir systématiquement une équipe de première division face à une équipe de seconde division. Exprimer a_n en fonction de n .
 (ii) Étudier la convergence de la suite (a_n) .
-

Exercice 1208*Ens 2022, Mines 2023*

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}([1, n])$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B = \emptyset)$.

**Exercice 1209***X 2024*

Soit Ω un ensemble. On dit que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone si elle vérifie :

- (i) $\Omega \in \mathcal{M}$, (ii) $\mathcal{M}$ est stable par union croissante,
 (iii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$.
 a) Montrer qu'une intersection de classes monotones est une classe monotone.
 b) Montrer qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.
 c) Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie. Montrer que la classe monotone D engendrée par C (c'est-à-dire la plus petite classe monotone contenant C) est une tribu.
-

Exercice 1210*Mines 2021*

Soit Ω un ensemble de cardinal N muni de la probabilité uniforme. Trouver m maximal tel qu'il existe m événements $A_1, A_2, \dots, A_m$ mutuellement indépendants non vides et distincts de Ω .

Exercice 1211 *Ens 2018*

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

b) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq k \leq n$. Montrer que $(-1)^k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} \geq 0$.

c) Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq k \leq n$, $A_1, \dots, A_n$ des événements.

Montrer que $\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) - \sum_{j=0}^k (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j})$ est du signe de $(-1)^k$.

Exercice 1212 *Ens 2015, Centrale 2017, Mines 2024*

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$. Caractériser l'égalité.

Exercice 1213 *Ens 2019* Soit F un ensemble fini ou dénombrable. Soient P et Q deux probabilités définies sur $(F, \mathcal{P}(F))$. On dit que Q domine P si et seulement, pour tout $k \in \llbracket 1, |F| \rrbracket$, on a :

$$\sup \{Q(I) ; I \subset F \text{ et } |I| = k\} \geq \sup \{P(I) ; I \subset F \text{ et } |I| = k\}$$

a) Déterminer les probabilités qui dominent toutes les autres.

b) Déterminer les probabilités qui sont dominées par toutes les autres.

Exercice 1214 *ENS 2019* Soient $E_1, \dots, E_n$ des événements d'un espace probabilisé.

a) On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(E_i) < 1/n$. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_n}) > 0$.

b) Soit $p \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $q > 0$ indépendant de n tel que les conditions :

(i) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(E_i) < q$;

(ii) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, tel que (E_i, E_j) soit indépendant de $(E_k)_{1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j}$;
impliquent $\mathbb{P}(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_n}) \geq (1-p)^n$.

Exercice 1215 *X 2016*

Une urne contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. Une boule est enlevée de l'urne au hasard. Anatole tire 6 fois une boule avec remise et obtient 6 fois une boule rouge. Barnabé tire 600 fois une boule avec remise et obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte. Lequel des deux peut s'attendre le plus à ce qu'une boule verte ait été enlevée ?

Exercice 1216 *Mines 2022*

Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. À chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée à laquelle on ajoute c boules de la même couleur. On note p_n la probabilité d'obtenir une première boule blanche au n -ème tirage.

a) On prend $c = 1$. Montrer que $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

b) On revient au cas général. On pose $a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+ck}{2+ck}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Montrer que $p_n = a_{n-1} - a_n$.

ii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) = -\infty$.

iii) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.



Exercice 1217 *Mines 2021*

Pour se rendre au travail, un automobiliste a le choix entre deux itinéraires : le A et le B . Le premier jour, il emprunte l'itinéraire A . L'automobiliste change d'itinéraire s'il a rencontré des embouteillages sur l'itinéraire de la veille et reprend le même s'il n'y avait pas d'embouteillages. La probabilité qu'il y ait des embouteillages sur l'itinéraire A (resp B) est notée a (resp. b). On note p_n la probabilité que l'automobiliste emprunte l'itinéraire A le n -ième jour.

a) Calculer p_1, p_2, p_3 . b) Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer la limite de (p_n) .



Exercice 1218

Une colleuse interroge successivement 2 élèves de



Spoirwoman et Spoirman.

Spoirwoman a un taux de résolution d'exercices de p_1 et Spoirman a un taux de résolution de p_2 .

La colle se termine lorsque l'un des deux arrive à résoudre son exercice.

Seul(e) celle ou celui qui aura alors résolu son exercice se verra gratifié(e) d'une excellente note de colle ...

a) La colleuse commence par donner un exercice à Spoirwoman.

Quelle est la probabilité que Spoirwoman l'emporte ?

b) Montrer qu'il est quasi-certain que la colle se termine.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 , la colle est-elle équitable ?

Exercice 1219 Un examinateur  s'apprête à faire passer n candidats   . Il a préparé à

cet effet n planches distinctes dont p sont plutôt  et les autres plutôt  ...

A chaque candidat, l'examineur tire de sa grosse main velue une planche au hasard.

Si vous pouviez choisir votre rang de passage, lequel choisiriez-vous ?



Exercice 1220

L'examinatrice



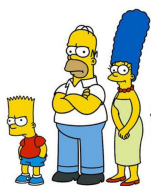
dit au candide candidat



: "Voici deux

classeurs identiques, et a exercices  et b exercices  . Répartis les exercices dans les classeurs, tu

tireras ensuite un classeur au hasard, puis un exercice de ce classeur au hasard.”
Comment le candide candidat maximise-t-il ses chances ?



Exercice 1221

Monsieur et Madame S.¹ ont deux enfants.

- a) L'un des deux enfants est une fille², quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon³ ?
 - b) L'ainée des enfants est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
 - c) L'un des deux enfants est une fille qui s'appelle Sophie, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
 - d) L'un des deux enfants est une fille qui est née un mardi, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
-



Exercice 1222

Un élève de PC*2, encore embrumé de sommeil, se lève un matin et tire d'un tiroir 3 chaussettes parmi 3 paires : les 3 sont désapariées. Quelle est la probabilité que cela se produise ? Généraliser avec n chaussettes.



Exercice 1223

X 2023

On a un dé équilibré à N faces numérotées de 1 à N , et on effectue une suite de lancers indépendants. Le jeu s'arrête lorsque le résultat du lancer $n + 1$ est strictement inférieur à celui du lancer n .

- a) Calculer la probabilité π_k que le jeu s'arrête après le rang k .
 - b) Montrer que π_k tend vers 0 pour $k \rightarrow +\infty$.
-



Exercice 1224

Paradoxe du chevalier de Méré⁴.

- a) Montrer qu'il est avantageux d'obtenir un 6 en lançant un dé quatre fois de suite.
 - b) Le chevalier de Méré avait le raisonnement suivant : Lorsqu'on lance un dé, il y a 6 issues possibles, lorsque on lance deux dés, il y en a 36, c'est-à-dire 6 fois plus. S'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 dés, il doit en être de même lorsqu'on parie sur l'apparition d'un double-six en lançant 6×4 fois 2 dés. Avait-t-il raison ?
-



1.



2.



3.

4. Le chevalier de Méré était un noble de la cour de Louis XIV (Louis Le Grand donc). Selon une lettre de Pascal à Fermat, "il avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre".



Exercice 1225

X 2018 On suppose que N passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se trompe et prend une place autre que la sienne. Les suivants prennent une place au hasard si leur place est déjà occupée.

Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.



Exercice 1226

On considère un gâteau rond, et on pose deux cerises sur la périphérie au hasard, à deux endroits différents (on suppose les cerises ponctuelles), puis on coupe une part P , limitée par deux rayons du disque. Il y a donc une part complémentaire $P' = D \setminus P$, où D est le disque.

Quelle est la probabilité que les deux cerises soient sur la même part ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 1227

Mines 2018, 2019

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers.

On fixe $s \in]1, +\infty[$ et on pose $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$.

On munit $\mathbb{N}^*$ de cette probabilité. On pose $A_p = p\mathbb{N}^*$ pour $p \in \mathcal{P}$.

b) Montrer que les (A_p) sont mutuellement indépendants.

c) Montrer que $\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 1/p_k^s}$.

d) Etudier la convergence de la série de terme général $1/p_k$.



Exercice 1228

Mines 2015, 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications f de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ telles que $f \circ f = f$.



Exercice 1229

X 2017

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, n\}$. On munit $\{1, \dots, n\}^{\{1, \dots, r\}}$ de la probabilité uniforme. On note $P(r, n)$ la probabilité qu'une application soit injective.

a) Exprimer $P(r, n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(2q, 12q) \leq \left(\frac{11}{12}\right)^q$.



Exercice 1230

X 2016 et 2021 Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $2 \leq p_1 < p_2 \leq n$. On munit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soient $E_1 = \{k \in \{1, \dots, n\}, p_1 \mid k\}$ et $E_2 = \{k \in \{1, \dots, n\}, p_2 \mid k\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si et seulement si n s'écrit sous la forme $n = k p_1 p_2 + \ell p_1$ avec $(k, \ell) \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \ell p_1 < p_2$.

Exercice 1231*Mines 2019*

Soient A et B deux évènements indépendants. On pose $Z = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. Montrer que l'un au moins des 3 nombres $a = \mathbb{P}(Z = 2)$, $b = \mathbb{P}(Z = 1)$ et $c = \mathbb{P}(Z = 0)$ est $\geq 4/9$.

Exercice 1232*X 2016, Mines 2023*

Soit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ muni de l'équiprobabilité.

Soit $a \in \{1, \dots, n\}$, on note A_a l'évènement " a divise ω ".

a) Si a est un diviseur de n , quelle est la probabilité de A_a ?

b) Soient $a_1, \dots, a_r$ des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux, montrer que les évènements $A_{a_1}, \dots, A_{a_r}$ sont mutuellement indépendants.

c) On pose $\varphi(n) = \text{card}\{m \in \{1, \dots, n\}, \text{pgcd}(m, n) = 1\}$, i.e. $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers plus petits que n et premiers avec n . φ s'appelle la fonction indicatrice d'Euler⁵.

Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers divisant n .

En calculant la probabilité qu'un élément de $\{1, \dots, n\}$ soit premier avec n , en déduire la formule classique :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

d) Soit d diviseur de n , on note B_d l'évènement $\text{pgcd}(\omega, n) = d$. Calculer la probabilité de B_d . En déduire cette autre formule classique : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

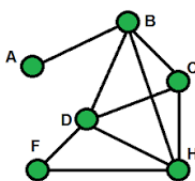
Exercice 1233

Soit $\Omega = \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(\omega = n) = \frac{1}{2^n}$ est une probabilité sur Ω .

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement " k divise ω ". Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.

c) On note B l'évènement " ω est un nombre premier". Montrer que $\frac{13}{32} < \mathbb{P}(B) < \frac{209}{504}$.

**Exercice 1234***X 2024*

Un graphe est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble de paires de S . Les éléments de S s'appellent les sommets de G et ceux de A les arêtes de G . Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes et f une application de S dans S' . On dit que f est un morphisme de G dans G' si $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A'$. On dit que f est un isomorphisme de G dans G' si $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \iff \{f(u), f(v)\} \in A'$.

Donner une majoration du nombre de graphes à n sommets et k arêtes deux à deux non isomorphes.

Exercice 1235*Mines 2022*

On fixe un entier naturel $N \geq 1$ et un réel $p \in]0, 1[$.

Une suite de joueurs, numérotés par les entiers naturels, jouent comme suit : à l'instant 1, le joueur 0 joue contre le joueur 1, puis le vainqueur joue contre le joueur 2 à l'instant 2, puis le vainqueur de cette seconde

5. Léonhard Euler, 1707-1783, mathématicien suisse

partie joue contre le joueur 3 à l'instant 3, etc.

On suppose que la probabilité que le joueur n gagne à l'instant n (contre le vainqueur de la partie précédente) est systématiquement égale à p . Le jeu s'arrête dès qu'un joueur a gagné N parties consécutives.

On note B_n l'événement « le jeu ne s'est pas arrêté jusqu'à l'instant n inclus ».

- a) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(B_n))$ est convergente.
 - b) Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \leq N$.
 - c) Montrer que $(\mathbb{P}(B_n))$ converge vers 0.
-



Exercice 1236

Vous jouez à pile ou face avec quelqu'un. Il parie sur Pile, lance la pièce, et obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?
