PC $\overset{\star}{2}$ **Feuille n° 17 : Exercices probables**

« Les questions les plus importantes de la vie ne sont, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. » Pierre-Simon de Laplace, *Théorie analytique des probabilités, 1812*

Les basiques

Exercice 1234 *Mines 2016 et 2018*

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements incompatibles. Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1235 *Mines 2016, 2018 et 2019*

Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?

Exercice 1236 Le concours d'entrée d'une prestigieuse école d'ingénieurs se compose de trois commissions et donc de trois examinateurs de mathématiques.

L'un des examinateurs est un probabiliste et pose en moyenne quatre fois sur cinq un exercice de proba aux malheureux candidats. Les deux autres examinateurs ne posent pas d'exercice de proba.

Vous êtes dans le couloir et les deux candidats qui vous ont précédé n'ont pas eu d'exo de proba.

C'est à vous d'entrer dans la salle ...

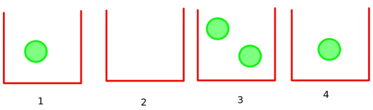
Quelle est la probabilité que vous soyez interrogé sur un exo de proba ?

Exercice 1237 *Indépendance conditionnelle.*

Deux évènements E et F sont dits *indépendants conditionnellement à un évènement* C lorsque $\mathbb{P}(E \cap F|C) = \mathbb{P}(E|C)\,\mathbb{P}(F|C)$.

Montrer que E et F peuvent être indépendants mais ne plus l'être conditionnellement à un évènement C.

Les incontournables



Exercice 1238 *X 2016 et 2017*

On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans n urnes numérotées. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide lorsque : a) les boules sont indiscernables b) les boules sont numérotées.

Exercice 1239  *X 2017*

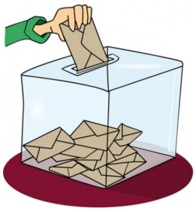
On range n boules distinctes dans n boîtes. Déterminer la probabilité π_n qu'une seule boîte soit vide puis donner un équivalent de π_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1240  *X 2019, Centrale 2019, Mines 2022*

Est-il possible de piper deux dés pour que la somme des deux dés suivent une loi uniforme sur $\{2, ..., 12\}$

Exercice 1241  *Centrale 2015 et 2022*

Soit $c \in \mathbb{N}^*$, un joueur entre dans un casino avec une somme au départ de k euros où $k \in \{0, ..., c\}$.
Il joue à une machine à sous qui le fait gagner avec une probabilité $p \in]0, 1[$.
S'il gagne, sa fortune augmente d'une unité, s'il perd, elle baisse d'une unité.
Le joueur s'arrête quand il n'a plus d'argent ou lorsque sa fortune atteint c.
Calculer la probabilité de ruine du joueur.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

Exercice 1242  *X 2015 et 2016*

Deux candidats , K.H. et D.T. , s'opposent lors d'une élection aux Etats-Unis. Le résultat est contesté. Dans un bureau de vote de 1000 électeurs d'un comté du New Hampshire, on recompte les bulletins les uns après les autres.
Résultat : D.T. recueille 600 voix et K.H. en recueille 400.
Quelle est la probabilité que D.T. soit resté en tête (strictement) tout au long du dépouillement ?

Exercice 1243 

On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au total k boules.
L'univers considéré est l'ensemble des fonctions $\Omega = \mathcal{F}(\{1, ..., k\}, \{1, ..., n\})$ muni de l'équiprobabilité.
a) Soit $j \in \{0, ..., k\}$, quelle est la probabilité qu'une urne donnée contienne j éléments donnés ?
b) Quelle est la probabilité qu'une urne donnée soit de cardinal j ?
c) Quelle est la probabilité que chaque urne contienne au plus une boule ?
d) Quelle est la probabilité pour qu'une fonction ω de Ω soit injective ?

1. Application : Etant donnée une assemblée de k personnes, quelle est la probabilité pour que deux personnes aient le même anniversaire ? (on ne tiendra pas compte des années bissextiles).

2. Quelle est la plus petite valeur de k rendant cette probabilité supérieure ou égale à $1/2$?
3. Si l'on fixe une personne dans l'assemblée, quelle est la plus petite valeur de k pour laquelle la probabilité qu'une autre personne ait le même anniversaire soit supérieure ou égale à $1/2$?

e) En appliquant la formule du crible, quelle est la probabilité pour qu'une fonction ω de Ω soit surjective ?

Exercice 1244  *Mines 2022 et 2023*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité p_n pour qu'une fonction aléatoire de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$, suivant la loi uniforme, soit surjective. Déterminer un équivalent de p_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1245  *X 2016, 2019 et 2021*

Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\{1, ..., n\}$ dans lui-même, muni de l'équiprobabilité.

a) Soit $i \in \{1, ..., n\}$, calculer la probabilité que i soit le point fixe d'une permutation.

b) Problème des bicornes : n polytechnicien(ne)s se rendent au bal de l'X en grand U. Chaque X dépose son bicorne au vestiaire. Après le bal, aux petites heures du jour, chacune et chacun reprend un bicorne au hasard. Quelle est la probabilité d_n que chaque X reparte avec un bicorne différent de celui qu'elle ou il avait en arrivant. Montrer que cette probabilité tend vers une limite ℓ lorsque $n \to +\infty$. c) Donner un équivalent de l'erreur $(\ell - d_n)$.

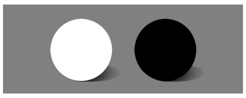
Exercice 1246  *Ens 2019*

On munit $\mathcal{S}_n$, l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, de la distribution uniforme. Déterminer la probabilité p_n pour qu'une permutation de $\mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$. $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$?

Les autres

Exercice 1247  *X 2017*

On suppose que 40 hommes et 40 femmes défilent dans un ordre aléatoire. Montrer que la probabilité de ne jamais avoir deux hommes ou deux femmes successivement est de l'ordre de un sur le nombre d'Avogadro.

Exercice 1248  *Mines 2015 et 2019*

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules de l'urne deux par deux. Quelle est la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire ?

Exercice 1249  *Mines 2019*

On suppose que n couples se rencontrent et se serrent la main. Chaque personne serre la main de toutes les autres sauf celle de son conjoint. Combien y a-t-il de poignées de mains échangées ?

Exercice 1250 *Mines 2019, X 2020* Soit $n \geqslant 2$.
a) Déterminer le cardinal de $\{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1, ..., n\})^2, A \subset B\}$.
b) Deux parties de $\{1, ..., n\}$ étant choisies au hasard, déterminer la probabilité pour que l'une soit incluse dans l'autre.

Exercice 1251
a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}$ tel que A ou $\bar{A}$ soit au plus dénombrable $\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$, contenant les évènements élémentaire $\{\omega\}$ pour $\omega \in \mathbb{R}$.
c) On définit sur $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si} \quad \bar{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Exercice 1252 *Mines 2017 et 2021*
Soit (a_n) une suite réelle non nulle, décroissante, et de limite nulle. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([n, +\infty[) = \lambda a_n$.

Exercice 1253 *Ens 2018*
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

b) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $(-1)^k \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} \geqslant 0$.

c) Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_1, \ldots, A_n$ des événements.

Montrer que $\mathbf{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) - \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right)$ est du signe de $(-1)^k$.

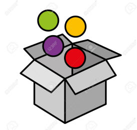
Exercice 1254 *Ens 2015, Centrale 2017*
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$. Caractériser l'égalité.

Exercice 1255 *Ens 2019* Soit F un ensemble fini ou dénombrable. Soient P et Q deux probabilités définies sur $(F, \mathcal{P}(F))$. On dit que Q domine P si et seulement, pour tout $k \in [\![1, |F|[\![$, on a :

$$\sup \{Q(I) \; ; \; I \subset F \text{ et } |I| = k\} \geqslant \sup \{P(I) \; ; \; I \subset F \text{ et } |I| = k\}$$

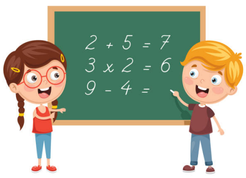
a) Déterminer les probabilités qui dominent toutes les autres.
b) Déterminer les probabilités qui sont dominées par toutes les autres.

Exercice 1256  *ENS 2019* Soient $E_1, \dots, E_n$ des événements d'un espace probabilisé.
a) On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(E_i) < 1/n$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_n}\right) > 0$.
b) Soit $p \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $q > 0$ indépendant de n tel que les conditions :
(i) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(E_i) < q$;
(ii) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $j \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i\}$, tel que (E_i, E_j) soit indépendant de $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq i, k \neq j}$;
impliquent $\mathbb{P}\left(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_n}\right) \geqslant (1-p)^n$.

Exercice 1257  *Mines 2017*
On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. Si on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne. Si on en tire une blanche, on l'ôte définitivement de l'urne. Si $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de tirer une boule blanche exactement en n tirages ?

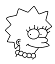
Exercice 1258  *Mines 2021*
Soit $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Calculer

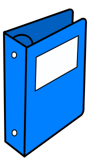
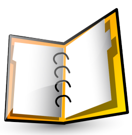
$$\sum_{(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{C}_n} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n) \quad \text{où} \quad \mathcal{C}_n = \left\{A_1, \overline{A_1}\right\} \times \dots \times \left\{A_n, \overline{A_n}\right\}$$



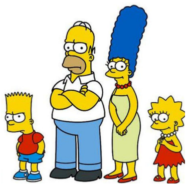
Exercice 1259 Une colleuse interroge successivement 2 élèves de 

: Spoirwoman et Spoirman.
Spoirwoman a un taux de résolution d'exercices de p_1 et Spoirman a un taux de résolution de p_2.
La colle se termine lorsque l'un des deux arrive à résoudre son exercice.
Seul(e) celle ou celui qui aura alors résolu son exercice se verra gratifié(e) d'une excellente note de colle ...
a) La colleuse commence par donner un exercice à Spoirwoman.
Quelle est la probabilité que Spoirwoman l'emporte ?
b) Montrer qu'il est quasi-certain que la colle se termine.
c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1, la colle est-elle équitable ?

Exercice 1260 Un examinateur  s'apprête à faire passer n candidats   . Il a préparé à cet effet n planches distinctes dont p sont plutôt  et les autres plutôt  ...
A chaque candidat, l'examinateur tire de sa grosse main velue une planche au hasard.
Si vous pouviez choisir votre rang de passage, lequel choisiriez-vous ?

Exercice 1261   L'examinatrice  dit au candide candidat  : "Voici deux classeurs identiques, et a exercices  et b exercices . Répartis les exercices dans les classeurs, tu

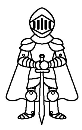
tireras ensuite un classeur au hasard, puis un exercice de ce classeur au hasard."
Comment le candide candidat maximise-t-il ses chances ?

Exercice 1262  Monsieur et Madame S.[1] ont deux enfants.
a) L'un des deux enfants est une fille[2], quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon[3] ?
b) L'ainée des enfants est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
c) L'un des deux enfants est une fille qui s'appelle Sophie , quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
d) L'un des deux enfants est une fille qui est née un mardi, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

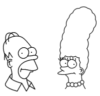
Exercice 1263  On tire d'un tiroir 3 chaussettes parmi 3 paires : les 3 sont désapariées. Quelle est la probabilité que cela se produise ? Généraliser avec n chaussettes.

Exercice 1264  On jette une pièce de monnaie symétrique jusqu'à ce qu'on ait obtenu n fois pile ou $n+1$ fois face. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu n fois pile au moment où on s'arrête ?

Exercice 1265  *X 2023*
On a un dé équilibré à N faces numérotées de 1 à N, et on effectue une suite de lancers indépendants. Le jeu s'arrête lorsque le résultat du lancer $n+1$ est strictement inférieur à celui du lancer n.
a) Calculer la probabilité π_k que le jeu s'arrête après le rang k.
b) Montrer que π_k tend vers 0 pour $k \to +\infty$.

Exercice 1266  *Paradoxe du chevalier de Méré*[4].
a) Montrer qu'il est avantageux d'obtenir un 6 en lançant un dé quatre fois de suite.
b) Le chevalier de Méré avait le raisonnement suivant : Lorsqu'on lance un dé, il y a 6 issues possibles, lorsque on lance deux dés, il y en a 36, c'est-à-dire 6 fois plus. S'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 dés, il doit en être de même lorqu'on parie sur l'apparition d'un double-six en lançant 6×4 dés. Avait-t-il raison ?

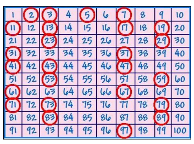
---

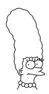
1. 
2. 
3. 
4. Le chevalier de Méré était un noble de la cour de Louis XIV (Louis Le Grand donc). Selon une lettre de Pascal à Fermat, "il avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre".

Exercice 1267  On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
b)Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 1268  *X 2018* On suppose que N passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se trompe et prend une place autre que la sienne. Les suivants prennent une place au hasard si leur place est déjà occupée.
Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.

Exercice 1269
On considère un gâteau rond, et on pose deux cerises sur la périphérie au hasard, à deux endroits différents (on suppose les cerises ponctuelles), puis on coupe une part P, limitée par deux rayons du disque. Il y a donc une part complémentaire $P' = D \backslash P$, où D est le disque.
Quelle est la probabilité que les deux cerises soient sur la même part ?

Exercice 1270  *Mines 2018, 2019*
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $(p_k)_{k\geqslant 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers.
On fixe $s \in]1, +\infty[$ et on pose $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$.
On munit $\mathbb{N}^*$ de cette probabilité. On pose $A_p = p\mathbb{N}^*$ pour $p \in \mathcal{P}$.
b) Montrer que les (A_p) sont mutuellement indépendants.
c) Montrer que $\zeta(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 1/{p_k}^s}$.
d) Etudier la convergence de la série de terme général $1/p_k$.

Exercice 1271  *X 2017*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \ldots, n\}$. On munit $\{1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,r\}}$ de la probabilité uniforme. On note $P(r, n)$ la

probabilité qu'une application soit injective.
a) Exprimer $P(r,n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1,\dots,n\}$.
b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(2q,12q) \leqslant \left(\dfrac{11}{12}\right)^q$.

Exercice 1272  *X 2016 et 2021* Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $2 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant n$. On munit l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ de la probabilité uniforme. Soient $E_1 = \{k \in \{1,\dots,n\},\ p_1 \,|\, k\}$ et $E_2 = \{k \in \{1,\dots,n\},\ p_2 \,|\, k\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si et seulement si n s'écrit sous la forme $n = k\,p_1p_2 + \ell p_1$ avec $(k,\ell) \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant \ell p_1 < p_2$.

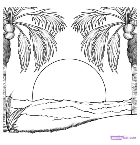
Exercice 1273  *Mines 2019*
Soient A et B deux évènements indépendants. On pose $Z = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. Montrer que l'un au moins des 3 nombres $a = \mathbb{P}(Z=2)$, $b = \mathbb{P}(Z=1)$ et $c = \mathbb{P}(Z=0)$ est $\geqslant 4/9$.

Exercice 1274  *X 2016, Mines 2023*
Soit $\Omega = \{1,...,n\}$ muni de l'équiprobabilité.
Soit $a \in \{1,...,n\}$, on note A_a l'évènement "a divise ω".
a) Si a est un diviseur de n, quelle est la probabilité de A_a ?
b) Soient $a_1,...,a_r$ des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux, montrer que les évènements $A_{a_1},...,A_{a_r}$ sont mutuellement indépendants.
c) On pose $\varphi(n) = \mathrm{card}\{m \in \{1,...,n\}, \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\}$, i.e. $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers plus petits que n et premiers avec n. φ s'appelle la fonction indicatrice d'Euler [5].
Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers divisant n.
En calculant la probabilité qu'un élément de $\{1,...,n\}$ soit premier avec n, en déduire la formule classique :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} (1 - \frac{1}{p})$$

d) Soit d diviseur de n, on note B_d l'évènement $\mathrm{pgcd}(\omega,n) = d$. Calculer la probabilité de B_d. En déduire cette autre formule classique : $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

Exercice 1275  *X 2022*
On considère un jeu constitué d'étapes successives, le système considéré est soit dans l'état 0, soit dans l'état 1. Au départ, le système est dans l'état 0. À chaque étape, le système a une probabilité $p \in]0,1[$ de passer à l'état 1 depuis l'état 0 et une probabilité $q \in]0,1[$ de passer à l'état 0 depuis l'état 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de l'état du système à l'étape n. Que se passe-t-il si $n \to +\infty$?

Exercice 1276  *Loi de succession de Laplace* [6].
On dispose de $N+1$ urnes numérotées chacune de 0 à N.
L'urne numérotée k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches. On tire une urne au hasard. Sans

5. Léonhard Euler, 1707-1783, mathématicien suisse
6. Cette étude a été introduite par Pierre-Simon Laplace pour "mesurer" la probabilité que le soleil se lève le lendemain, sachant qu'il s'est levé chaque jour depuis 5000 ans ...

connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise à chaque tirage.
a) Quelle est la probabilité que le $n+1$-ième tirage donne encore une boule rouge, sachant qu'au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?
b) Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 1277  Soit $\Omega = \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $\mathbb{P}(\omega = n) = \dfrac{1}{2^n}$ est une probabilité sur Ω.
b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "k divise ω". Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
c) On note B l'évènement "ω est un nombre premier". Montrer que $\dfrac{13}{32} < \mathbb{P}(B) < \dfrac{209}{504}$.

Exercice 1278  *Mines 2022*
On fixe un entier naturel $N \geqslant 1$ et un réel $p \in]0,1[$.
Une suite de joueurs, numérotés par les entiers naturels, jouent comme suit : à l'instant 1, le joueur 0 joue contre le joueur 1, puis le vainqueur joue contre le joueur 2 à l'instant 2, puis le vainqueur de cette seconde partie joue contre le joueur 3 à l'instant 3, etc.
On suppose que la probabilité que le joueur n gagne à l'instant n (contre le vainqueur de la partie précédente) est systématiquement égale à p. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur a gagné N parties consécutives.
On note B_n l'événement « le jeu ne s'est pas arrêté jusqu'à l'instant n inclus ».
a) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(B_n))$ est convergente.
b) Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \leqslant N$.
c) Montrer que $(\mathbb{P}(B_n))$ converge vers 0.

Exercice 1279  Vous jouez à pile ou face avec quelqu'un. Il parie sur Pile, lance la pièce, et obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?
