



« Je vous dis Monseigneur, et c'est là démontrable,
Que cette famille ci, peut n'être point sommable . »,
La Cyminde, François Hédelin.

**Exercice 1185***Ens 2007*

- a) Peut-on trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(a)$ soit une paire ?
 b) Peut-on trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, $\forall a \in [0, 1]$, $f^{-1}(a)$ soit une paire ?
 c) Trouver une fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\forall a \in [0, 1]$, $f^{-1}(a)$ soit une paire.

Exercice 1186*Ens 2010*

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la somme $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|mz + n|^k}$ est-elle définie ?

Exercice 1187Une suite d'entiers (n_k) est dite

- presque nulle s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq p$, $n_k = 0$.
- stationnaire s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq p$, $n_k = n_p$.

Démontrer que l'ensemble des suites d'entiers presque nulles et que l'ensemble des suites d'entiers stationnaires sont dénombrables.

Exercice 1188

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $x \in]a, b[$, on pose $\delta(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ (c'est le "saut" de f en x).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $E_n = \{x \in]a, b[; \delta(x) > 1/n\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Généraliser ce résultat au cas où f est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

Exercice 1189

On dit qu'un réel x est un nombre algébrique s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $a_0, \dots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que

$$a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Le plus petit entier d vérifiant cette propriété est alors le degré de x .

1. Dénombrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré d est dénombrable.
 2. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
-

Exercice 1190



1. Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}}$.
 2. Soit (u_n) une suite de $[0, 1]$.
Montrer que, $\forall n \geq 1$, il existe un élément x_n dans $[0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n [u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}]$.
 3. Pourquoi peut-on extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergente vers $\ell \in [0, 1]$?
 4. Démontrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.
-

Exercice 1191



1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Exercice 1192



X 2017

Soit A une partie dénombrable et dense de $[0, 1]$.

Existe-il une bijection continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ envoyant A sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$? Même question en remplaçant « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ ».

Exercice 1193



Ens 2016

a) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

On suppose que la série de terme général u_n^2 converge.

Montrer que la série de terme général v_n^2 converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$.

Ind. Si $a = (a_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle, on pose $\Delta(a)_n = a_n - a_{n-1}$ avec $a_0 = 0$.

Montrer que $v_n^2 + \Delta((kv_k^2)_{k \geq 1})_n \leq 2u_nv_n$.

b) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que la série de terme général u_n^2 converge.

Montrer que la série double $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n u_m}{n+m}$ converge.

Exercice 1194



X 2023

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $|I|$ sa longueur. Montrer qu'il existe une famille $(I_j)_{j \in A}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point, deux à deux disjoints et tels que

$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{j \in A} I_j$ et $\sum_{j \in A} |I_j| = 42$.
