



« Der Mensch ist nichts anderes als die ganze Reihe seiner Taten. ¹ », Hegel, *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften*, 1817.

LES BASIQUES

Exercice 1105  Mines 2011 Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n . Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_n x^n$.

Exercice 1106  Mines 2016 et 2019 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $a_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$.

- Nature de la série de terme général a_n ? de la série de terme général $(-1)^n a_n$?
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 1107  Mines 2010 Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(\sqrt{t}) dt$.

- Justifier la définition de I .
- Pour $p \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, on pose : $I_p = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sqrt{t})^{2p+1} dt$. Justifier la définition de I_p . Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p . En déduire une expression de I_p en fonction de p .
- Calculer I .

Exercice 1108  X 2013 et Mines 2014 Soit $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y} dy$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- La fonction f est-elle D.S.E. au voisinage de 0 ? Si oui, quel est son rayon de convergence ?
- Calculer $f(1)$.
- La fonction f est-elle dérivable ?



Exercice 1109 Nombres de Catalan² - Centrale 2010 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par :
 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et S la somme pour $|x| < R$.

- On suppose $R > 0$. Montrer que $S(x) = x + S(x)^2$.
- En déduire une expression de $S(x)$ ainsi que le rayon R .
- Montrer : $\forall n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

1. « L'homme n'est rien d'autre que l'entière série de ses actes », Hegel, *Encyclopédie des sciences philosophiques*, 1817.
 2. Eugène Charles Catalan : 1814 Bruges - 1894 Liège : mathématicien franco-belge. Il entre à l'X en 1833 et s'en fait expulser l'année suivante à cause de ses idées fortement marquées à gauche. En 1844, il énonce la conjecture suivante, qui deviendra célèbre : deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes... Elle a été démontrée en 2002 par Preda Mihailescu.

4. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le produit P_n de n éléments $x_1, \dots, x_n$ dans cet ordre. Dénombrer le nombre c_n de parenthésages possibles pour calculer ce produit par multiplications successives.
 Par exemple : $c_2 = 1$; $p_3 = (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$ donc $c_3 = 2$;
 $p_4 = x_1 (x_2 (x_3 x_4)) = x_1 ((x_2 x_3) x_4) = (x_1 x_2) (x_3 x_4) = ((x_1 x_2) x_3) x_4 = (x_1 (x_2 x_3)) x_4$ donc $c_4 = 5$.
 Montrer : $\forall n \geq 1, a_n = c_n$.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1110 X 2023

Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n+3}{n+2} a_{n+1} + \frac{3n+7}{n+1} a_n$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est strictement positif et trouver un minorant de ce rayon.

Exercice 1111 X 2010 et 2011, Ens 2014

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose que la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et qu'elle diverge en $x = 1$.

1. Montrer que $\sum a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$.
2. On suppose que $a_n \sim b_n$. Montrer que $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ lorsque $x \rightarrow 1$.
3. Applications :
 - (a) Déterminer un équivalent de $\sum n^k x^n$ lorsque $x \rightarrow 1$ pour $k \in \mathbb{N}$.
 - (b) Déterminer un équivalent de $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ lorsque $x \rightarrow 1$.
 - (c) Déterminer un équivalent de $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$ lorsque $x \rightarrow 1$. En déduire un équivalent de $\sum \ln n x^n$ au voisinage de 1.
 - (d) Déterminer un équivalent de $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ lorsque $x \rightarrow 1$.
4. Donner un résultat du même ordre pour deux séries entières de rayon de convergence infini (préciser les hypothèses).

En déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$ puis de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 1112 X 2018, Ens 2022 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

- a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- b) Montrer que $f(x) = o(e^x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 1113 Mines 2022

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite nulle.

- a) Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
- b) Montrer que $\sum a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o((\ln(1-x)))$.

Exercice 1114*Développement en série entière d'un quotient*

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant l'égalité : $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = 1$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq A^n$ et en déduire qu'il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq B^n$. Que dire alors du rayon de convergence de $\sum b_n z^n$?
3. Montrer que si f et g sont deux fonctions développables en série entière et telles que $g(0) \neq 0$, la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ est développable en série entière.
4. Application à $f : x \mapsto \tan x$. Montrer que f est développable en série entière et donner une formule de récurrence liant ses coefficients.

Exercice 1115*X 2012 et 2014, Mines 2018 et 2024*

On pose $b_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} b_k$.

- a) Montrer que, pour tout n , $|b_n| \leq n!$. b) Pour $|z| < 1$, montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \frac{z}{e^z - 1}$.
- c) Montrer que $x \mapsto \cotan(x) - \frac{1}{x}$ est développable en série entière.
- d) Quel est le lien entre les deux dernières questions ? On pourra poser $z = 2i\pi x$.

Exercice 1116*Mines 2017*

On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$ et, pour tout n , $a_n = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- a) Montrer que, pour tout n , $a_n \in \mathbb{Q}$.
- b) Montrer que le rayon de convergence de cette série est ≥ 1 .
- c) Montrer que, si $|z| < 1$, $f(z) = \frac{2}{e^z + 1}$. En déduire que $R = \pi$.

Exercice 1117*Fonctions absolument croissantes - Centrale 2009*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. On la dit absolument croissante lorsqu'elle-même et ses dérivées successives sont toutes positives.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, (également appelée formule de Taylor-Laplace), montrer que la série de Taylor de cette fonction converge sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.
3. On veut montrer que cette série converge vers f , i.e. que f est développable en série entière. Soit $x > 0$, et soit $y > x$, montrer que $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$, puis que $R_n(x) \rightarrow 0$.
4. En déduire que f est développable en série entière, et prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Que penser d'une fonction absolument croissante (ou décroissante) à partir d'un certain rang ?
6. Application : montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 1118*Mines 2016*

Soit $f : x \mapsto e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt$.

- a) Montrer que f est développable en série entière. Déterminer de deux façons son développement en série

entière.

b) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

c) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 1119



Mines 2011, X 2015 et 2022, Centrale 2019 et 2024

Domaine de définition et équivalent en 1^- de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

Exercice 1120



Mines 2011, 2015, 2024, Centrale 2023

On cherche à calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et trouver une équation différentielle du 1^{er} ordre satisfaite par f .
 2. Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ et en déduire S .
-

Exercice 1121



CCP 2005, X 2006 et 2012

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f .

1. Montrer que pour $p \in \mathbb{Z}$: $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p$.
 2. On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, |a_p| \leq \frac{M}{r^p}$. En déduire que f est une fonction constante.
 3. On suppose qu'il existe des réels $a > 0$, $b > 0$, et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq a|z|^q + b$. Montrer que f est une fonction polynomiale.
 4. On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \exp(\operatorname{Re}(z))$. Montrer que : $\exists K \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = Ke^z$.
-

LES AUTRES

Exercice 1122



Mines 2022

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt[4]{x}) - \cos(\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, f(x) = \frac{2 \operatorname{sh}\left(\sqrt[4]{\frac{-x}{4}}\right) \sin\left(\sqrt[4]{\frac{-x}{4}}\right)}{\sqrt{-x}}$.
Montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1123



Ens 2022

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le produit des chiffres de n dans l'écriture décimale (par exemple $p_{10} = 0$, $p_{45} = 20$, $p_{405} = 0$ etc). Déterminer le rayon de convergence de $\sum p_n z^n$.

Exercice 1124



Mines 2022

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2.

- a) Montrer que $x \mapsto e^{P(x)}$ est la somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$, dont on notera $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite des coefficients.
- b) Montrer que (a_n) ne possède pas deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 1125*Mines 2024*

Soit N un entier qui n'est pas un carré parfait. On pose $a = \sqrt{N}$.

- Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $na - p_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
 - Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(na\pi) > cn^{-1}$.
 - En déduire le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.
-

Exercice 1126*Mines 2016*

Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Exercice 1127*Centrale 2017*

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2^n}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
 - Pour $x \in]-R, R[$, exprimer $f(x^2)$ en fonction de $f(x)$ et x . En déduire la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow R^-$.
 - On suppose qu'existe $\alpha \in]-R, R[$ tel que $f(\alpha) > 1/2$. Montrer que f n'admet pas de limite en R^- .
-

Exercice 1128*X 2024*

La fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1^- ?

Exercice 1129*Mines 2013 et 2023*

Soit (a_n) une suite de complexes tous non nuls. Soient R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.

- Montrer que si R et R' sont finis alors $RR' \leq 1$.
 - Trouver un exemple avec $0 < RR' < 1$.
-

Exercice 1130*Comparaison des rayons de convergence*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R_a ainsi que la série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence R_b où b_n est fonction de a_n . Dans chacun des cas suivants, déterminer R_b en fonction de R_a .

- $b_n = a_n^2$.
- $b_n = \frac{a_n}{1 + a_n}$.
- $b_n = a_n F(n)$ où $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle telle que Q n'admette pas de racine dans $\mathbb{N}$.
- $b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.
- $b_n = \int_0^{a_n} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 1131 *Centrale 2005*

Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum na_n$ soit absolument convergente.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1. On note $f(z)$ la somme de cette série pour $z \in D$.
 2. On suppose $(*) : a_1 \neq 0$ et $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| |z|^n$ pour $z \in D$. Montrer que f est injective sur D .
 3. Etudier le cas $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3}$.
 4. Donner une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum na_n$ soit absolument convergente, que f soit injective dans D et ne vérifie pas la condition $(*)$.
-

Exercice 1132 *Mines 2019 et 2023 et 2024*

Développer en série entière au voisinage de l'origine $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

Exercice 1133 *Mines 2022*

- a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n := \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$ est bien définie, et la calculer.
 - b) Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est la somme d'une série entière.
 - c) Préciser une équation différentielle linéaire dont F est solution, et la résoudre.
-

Exercice 1134 *X MP 1981* Soit une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\forall n, b_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \beta$ avec $|\beta| < R$.
On considère $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{b_n} = f(\beta)$.

Exercice 1135 *Mines 2019 et 2023*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

- a) Justifier la définition de u_n .
 - b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
 - c) étudier la convergence en R et en $-R$.
-

Exercice 1136 *Centrale 2006 et 2019*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1) \dots (t-n+1) dt$.

- a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
- b) Déterminer la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

- c) On admet provisoirement que $\sum a_n$ converge absolument. Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.
- d) Montrer que la série de terme général a_n converge absolument.
-

Exercice 1137  *Centrale 2010 et X 2013* rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{[\sqrt{n}]}$.

Exercice 1138  *Centrale 2023*
 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le nombre de $(n+1)$ -uplets $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $a_1 + \dots + a_{n+1} = n$.

a) On admet provisoirement que $p_n = \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver le domaine de convergence et la valeur de la somme de la série entière $\sum \frac{p_n}{4^n} x^n$.

b) Démontrer la formule admise à la question précédente.

Exercice 1139  *X 2017* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

b) Montrer que $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1-4x})$ pour $x \in]-R, R[$. Que dire de R ?

Exercice 1140  Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)(n+2) \dots (2n+1)}$ ( Penser à John Wallis.³).

Exercice 1141  *Centrale 2012, 2016 et 2018, Mines 2023*
 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$.

b) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0 .

c) Donner une expression simple de f et en déduire une expression de a_n en fonction de n .

Exercice 1142  *Centrale 2007* Si $n \in \mathbb{N}^*$, soient $d_n = \text{Card}\{k \in \mathbb{N}^*, k|n\}$ et $D_n = \sum_{k=1}^n d_k$.

Soient $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n$

- Déterminer les domaines de définition de f et de g .
- Donner une relation simple entre f et g .
- Déterminer les limites en 1^- de f et de g .

3. John Wallis 1616 Ashford - 1703 Oxford, Angleterre : On lui doit la notation ∞ pour désigner l'infini. Dans son ouvrage *Arithmetica Infinitorum* 1656, il établit la formule $\frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{4}{7} \frac{6}{9} \frac{6}{11} \dots \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} \dots = \frac{\pi}{2}$ avant de s'embarquer pour le Pacifique sud avec son ami physicien et écossais Edward Futuna.

4. Tracer les graphes de f et de g .

5. Montrer que $D_n \sim nH_n$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (On pourra utiliser : $a(n, k) = 1$ si $k|n$ et 0 sinon).

Exercice 1143



Centrale 2022

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par la donnée de u_0 et v_0 dans $\mathbb{R}^*$ et par les relations $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n - av_n$.

Montrer que les séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont des rayons de convergence non nuls et égaux et calculer leurs sommes.

Exercice 1144



Mines 2015 et 2019

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant : $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

- Montrer que le rayon de convergence de f est > 0 .
- Déterminer une équation différentielle vérifiée par f .
- Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on dit que σ est *alternante montante* si $\sigma(1) < \sigma(2)$, $\sigma(2) > \sigma(3)$, $\sigma(3) < \sigma(4)$... On dit que σ est *alternante descendante* si $\sigma(1) > \sigma(2)$, $\sigma(2) < \sigma(3)$, $\sigma(3) > \sigma(4)$... On note b_n (resp. c_n) le cardinal de l'ensemble des permutations alternantes montantes (resp. alternantes descendantes). Exprimer b_{n+1} en fonction des b_k , pour $0 \leq k \leq n$ avec $b_0 = 1$.

Exercice 1145



Mines 2024

Soit $(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

- Trouver les solutions de (E) développables en série entière et déterminer leur rayon de convergence.
 - Écrire ces fonctions à l'aide des fonctions usuelles.
-

Exercice 1146



X 2024

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf'(x/2)$.

- Chercher les $f \in \mathcal{S}$ développables en série entière.
 - L'espace $\mathcal{S}$ est-il de dimension finie ?
-

Exercice 1147



Mines 2024

Montrer qu'il existe une fonction φ DSE vérifiant au voisinage de 0 : $\varphi'(x) = x + \varphi^2(x)$.

Exercice 1148



Mines 2010, 2011 et 2012

Résoudre dans $\mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

Exercice 1149



Mines 2013, 2022 et 2023 et 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.
- Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1150*Mines 2024*

Préciser le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} e^{-n} e^{in^2 x}$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle développable en série entière ?

Exercice 1151*Centrale 2022*

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$.

a) Déterminer les rayons de convergence R et R' de f et g .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow R} f(x)$.

c) Montrer que $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{1 - |x|}$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ en 1.

Exercice 1152*Mines et Centrale 2022*

Soient $q \in]-1, 1[$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - qx)f(qx)$ et $f(0) = 1$. La fonction f est-elle développable en série entière ?

Exercice 1153*Centrale 2023*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{\pi/2} \arctan\left(\frac{\sin(t)}{x + \cos(t)}\right) dt$.

On note $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

a) Montrer que $f(1) - f(0) = -\frac{3}{4} I$.

b) Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

c) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1154*Centrale 2011, Mines 2022*

Existence, limite et équivalent de $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1 - t^2} dt$.

Exercice 1155*ENS Lyon 2006*

Soit $\Phi : (P, Q) \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P(x) Q(x) dx$.

1. Montrer que Φ existe et définit un produit scalaire sur un espace convenable.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et y développable en série entière sur $\mathbb{R}$ tels que : $(\exp(-x^2)y'(x))' + \lambda \exp(-x^2)y(x) = 0$ et $y(x) = O(x^k)$ en $\pm\infty$.

3. En déduire une suite de fonctions développables en série entière orthonormale pour Φ .

Exercice 1156*X 2006 PSI*

1. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Montrer que $y \cotan y = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$ où $z = 2iy$.

2. Montrer que $\frac{e^z - 1}{z}$ est développable en série entière en 0.

On admettra que son inverse $\frac{z}{e^z - 1}$ l'est aussi et on pose $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$.

Trouver une relation de récurrence entre les B_k . Calculer B_0, B_1 et B_2 .

3. Pour $y \in]-, [$ on pose $g(y) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2}$. Montrer que $g(y) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} y^{2k}$.

4. On admet que $g(y) = y \cotan y$. En déduire une expression de $\zeta(2k)$ en fonction des B_{2k} .

Exercice 1157



Ens 2023

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon > 1 . Soient $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \varphi(y) f(x - y) dy$. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1158



X 2018 Existe-t-il g^+ et g^- développables en séries entières au voisinage de l'origine telles que, au voisinage de l'origine, $g^+(z) = g^-(-z)$ et $g^+(z) g^-(z) = \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z}$?

Exercice 1159



Centrale 2024

a) Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On pose $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b) Montrer que F est bien définie sur $] -1, 1 [$.

c) On suppose que $\sum a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \ell$.

d) Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement que $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ?

Exercice 1160



Mines 2016

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, une série entière de RCV égal à 1. On suppose que la série de fonctions définissant f converge uniformément sur $[0, 1[$. Montrer que $a_n \rightarrow 0$. étudier la réciproque.

Exercice 1161



Mines 2019

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et que f est bornée sur $[0, 1[$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 1162



X 2009 et 2012, Ens 2015

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} z^{n!}$.
 2. Montrer que l'on ne peut prolonger f sur le voisinage d'aucun point du cercle unité.
-

Exercice 1163

X 2023

Etudier la limite de $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k!}$ lorsque x tend vers 1^- .

Exercice 1164

X 2011

Soient D le disque fermé unité et $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R = 1$. On suppose que F est nulle sur le cercle unité et que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in D^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$. Montrer que F est nulle sur D .

Exercice 1165

X 2006, Centrale 2018

Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ les sommes de deux séries entières de RCV $R > 0$.

- a) Montrer que s'il existe une suite (z_i) de complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, alors f est identiquement nulle.
 - b) Montrer que si $f(z)g(z) = 0, \forall z \in D(O, R)$, alors l'une des deux fonctions est identiquement nulle.
-

Exercice 1166

X 2009

Soient D (resp. $\overline{D}$) le disque unité ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$. Soit $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

1. On suppose que f est développable en série entière sur D et que f est nulle sur le cercle unité. Montrer que f est nulle sur $\overline{D}$.
 2. On suppose que f est développable en série entière sur D et que f est nulle sur un arc de longueur non nulle du cercle unité. Montrer que f est nulle sur $\overline{D}$.
-

Exercice 1167

X 2023

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = a_0 + \dots + a_n$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$. On

considère les assertions :

- (i) la suite (σ_n) converge,
 - (ii) $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 , et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe (et est finie).
- A-t-on (i) $\implies$ (ii) ? A-t-on (ii) $\implies$ (i) ?
-

Exercice 1168

Centrale 2023

a) Déterminer une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle qu'on ait $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence et le domaine de validité de l'égalité ci-dessus.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Prouver que $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \right)^2 = I_n + A$.

c) Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quelconque, l'équation $X^2 = B$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 1169

Ens 2017

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} = O(\sqrt{n})$.

b) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} z^k$ converge si $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1170

Mines 2019

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$

et qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non nuls tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, on ait $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Montrer que, pour n assez grand, le déterminant de la matrice $(a_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ est nul.

Exercice 1171

Mines 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \text{Tr}(A^n) z^n$ en fonction du polynôme caractéristique de A .

Exercice 1172

Mines 2013

Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et E_r l'ensemble des $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière.

Si $f \in E_r$, soit $T(f) : x \in]-r, r[\mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{x+t} dt$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E_r et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 1173

Centrale 2024

Soit D_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

a) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ et $g : x \mapsto f(x) e^x$. Calculer $g(x)$.

d) Écrire D_n sous la forme d'une somme et en déduire un équivalent de D_n .

Exercice 1174

Centrale 2022

Une involution d'un ensemble X est une fonction $f : X \rightarrow X$ telle que $f \circ f = \text{Id}_X$. On note I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Trouver une relation de récurrence sur $(I_n)_n$ (reliant trois termes consécutifs).

b) Montrer que la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence strictement positif.

c) En déduire que $I_n = \frac{d^n e^{x+\frac{x^2}{2}}}{dx^n}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Exercice 1175 *X 2015, Mines 2018 et 2019, Centrale 2024*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = B_1 = 1$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

b) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0 .

c) Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

d) En déduire que B_n s'écrit comme somme d'une série.



Exercice 1176 *Centrale 2011, X 2016, Ens 2017*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Card} \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, 2k + 3\ell = n\}$. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$.

a) Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.

b) Déterminer le rayon de convergence R de f .

c) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, on a $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$.

d) En déduire une expression de u_n .



Exercice 1177 *X 2023*

Soit c_n le nombre de listes $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers telles que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$ et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_{i+1} \neq a_i + 1$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on a $c_n = (n-1)c_{n-1} + (n-2)c_{n-2}$.

b) Montrer que la suite $\left(\frac{c_n}{n!}\right)$ converge vers une limite non nulle.



Exercice 1178 *Mines 2023*

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

Montrer que, pour $|z| < 1$, $L(z) = \ln(|1+z|) + i \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{1+\text{Re}(z)}\right)$. Ind. Considérer $f_z : t \in [0, 1] \mapsto L(tz)$.



Exercice 1179 *Ens 2017*

Soient $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$ et $\Omega = \{re^{i\theta} ; 0 \leq r \leq 1, -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de f .

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n : z \mapsto \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$. Montrer que (S_n) converge uniformément vers f sur Ω .

Ind. Majorer $T_n(z) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} z^k$ sur Ω et écrire $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-1}(z) - T_n(z)}{k}$.

- c) On fixe $\theta \in]-\pi, \pi[$. Soit $\ell : x \in [0, 1[\mapsto f(x e^{i\theta})$. Calculer ℓ' .
d) Montrer que $x \mapsto e^{\ell(x)}$ a une dérivée seconde nulle.
e) En déduire la valeur de $f(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.
-

Exercice 1180



X 2024

On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E . Déterminer l'adhérence de A .

Exercice 1181



X 2024

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$.

- a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
b) Montrer que la restriction de f à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.
-

Exercice 1182



X 2024

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

- a) Vérifier que f est bien définie sur $] -1 ; 1 [$.
b) Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1^-} t f(t) = 0$.
c) On suppose de plus qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_r$ et $0 < \theta_1 < \dots < \theta_r < \pi$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^r a_k \cos(n\theta_k)$. Montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.
-

Exercice 1183



X 2024

Soit $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $f_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} z^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On note B l'ensemble des nombres complexes de module ≤ 1 .

On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in B$, $|f_n(z)| \leq M$.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ pour tout $r < 1$.

Exercice 1184



X 2024

Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(z) = O(z^k)$ quand $z \rightarrow 0$.

Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
