PC$^{\star}_{2}$ Ensemble au plus dénombrable d'exercices n° 16

« Je vous dis Monseigneur, et c'est là démontrable,
Que cette famille ci, peut n'être point sommable . »,
La Cyminde, François Hédelin.

Exercice 1221  *Ens 2010*
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 3$. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{|mz+n|^k}$ est-elle définie ?

Exercice 1222 
Déterminer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 1223  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $x \in]a,b[$, on pose $\delta(x) = \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y)$ (c'est le "saut" de f en x).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $E_n = \{x \in]a,b[;\ \delta(x) > 1/n\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Généraliser ce résultat au cas où f est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

Exercice 1224  Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non-vides deux à deux disjoints. Démontrer que A est nécessairement au plus dénombrable.

Exercice 1225  *Ens MP 2018* Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbb{R},+)$.
Montrer que $\mathbb{R} \setminus G$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1226  Etudier la sommabilitude des familles suivantes :
a) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha}$ b) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$

Exercice 1227  Démontrer que la famille suivante n'est pas sommable : $\displaystyle\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;

Exercice 1228  Calculer les sommes suivantes :
$$A = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}, \qquad B = \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2q^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}.$$

Exercice 1229 Soit $x \in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 1230 On réordonne les termes de la série harmonique alternée en prenant tour à tour p termes positifs puis q termes négatifs, $p, q \geq 1$. Calculer la somme de la série correspondante.

Exercice 1231 *X 2017* Soit A une partie dénombrable et dense de $[0,1]$.
Existe-il une bijection continue de $[0,1]$ sur $[0,1]$ envoyant A sur $\mathbb{Q}\cap[0,1]$? Même question en remplaçant « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ ».

Exercice 1232 a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt + i\int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = 0.$
En déduire : $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta.$
b) Soient $2n$ réels positifs $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{a_k b_\ell}{k+\ell} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2}.$
c) Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.
Montrer que la suite double $\displaystyle\left(\frac{a_k b_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Exercice 1233 *Ens 2016*
a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}$. On suppose que la série de terme général u_n^2 converge. Montrer que la série de terme général v_n^2 converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$. *Ind.* Si $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite réelle, on pose $\Delta(a)_n = a_n - a_{n-1}$ avec $a_0 = 0$. Montrer que $v_n^2 + \Delta((kv_k^2)_{k\geqslant 1})_n \leqslant 2u_n v_n$.
b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que la série de terme général u_n^2 converge. Montrer que la série double $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n u_m}{n+m}$ converge.

Exercice 856 *X 2023*
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $|I|$ sa longueur. Montrer qu'il existe une famille $(I_j)_{j\in A}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point, deux à deux disjoints et tels que
$\mathbb{Q}\subset\bigcup_{j\in A} I_j$ et $\displaystyle\sum_{j\in A}|I_j| = 42$.
