



« Non riesco più a capire quali siano i parametri per valutare un giocatore. », Gianluigi Buffon, *Gazzetta dello Sport*, juillet 2017.

LES BASIQUES

Exercice 1058 Centrale 2024

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} dt$. a) Quel est l'ensemble de définition de f ? b) Sur quel ensemble f est-elle continue? c) Sur quel ensemble f est-elle de classe \mathcal{C}^1 ? Calculer f' .

Exercice 1059 X 2017

Soit $F : a \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$.

- a) Montrer que F est bien définie.
- b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
- c) Déterminer la limite ℓ de F en 0^+ , puis un équivalent de $F - \ell$.

Exercice 1060 Mines 2024

Pour $x > 0$, on pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}} dt$.

- a) Calculer $F'(x)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis déterminer un équivalent de F en $+\infty$.
- c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = +\infty$, puis déterminer un équivalent de F en 0.

Exercice 1061 Mines 2023 et 2024

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh}(t)}{t} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de F .
- b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
- c) Trouver une expression simplifiée de F .

Exercice 1062 Mines 2015, Centrale 2015 et 2023

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1063 Mines 2008, 2010, 2012, 2015 et 2016, Centrale 2016 et 2022

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- b) Donner des équivalents de f quand $x \rightarrow 0^+$ et quand $x \rightarrow +\infty$.
- c) Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .

**Exercice 1064**Centrale 2005, 2011 et 2013, X 2016, Mines 2019 : Fonction $\Gamma\zeta$ d'Eumann et Rieler

On pose : $g(x, t) = \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$.

- a) Domaine de définition de F ? b) Vérifier que pour $x > 1$ on a $g(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$.
 c) En déduire que pour tout $x > 1$, $F(x) = \Gamma(x)\zeta(x)$ puis que F est de classe \mathcal{C}^∞ .

**Exercice 1065**

X 2006

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$.

**Exercice 1066**

Mines 2009, 2010 et 2016

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C}) ; \forall s > 0, u \mapsto \frac{f(u)}{u+s} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \right\}$.

On note, pour $s > 0$, $\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} ds$.

1. Soit L l'ensemble des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^{+*} . Comparer L à E .
2. Soit $f_\alpha : u \mapsto u^{\alpha-1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f_\alpha \in E$?
3. Soit α tel que $f_\alpha \in E$. Montrer que \hat{f}_α est continue sur \mathbb{R}^{+*} et donner sa limite en $+\infty$.
4. Soit f dans E . Montrer que \hat{f} est continue sur \mathbb{R}^{+*} . Déterminer la limite de \hat{f} en $+\infty$.

**Exercice 1067**

X 2015

Soit $f : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2 - 2i\pi xt) dx$.

- a) Déterminer le domaine de définition D de f . Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
 b) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f . En déduire f .

**Exercice 1068**

Mines 2009, 2010, 2013, 2017, 2022, 2024 X 2022

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

- a) Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et impaire.
 b) Montrer que F est dérivable et écrire F' sans symbole d'intégration.
 c) En déduire F et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

**Exercice 1069**

X 2009 et 2015, Centrale 2013, Mines 2017, 2018, 2022 et 2023

Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Montrer que f est bien définie. Étudier la monotonie de f .
2. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x+1) + f(x)$.
3. Donner des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.

LES AUTRES

Exercice 1070

Centrale 2011 et 2023, Mines 2012, 2013 et 2016

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}) dt$.

Définition, continuité, dérivabilité. Trouver une EDL du 1er ordre satisfaite par f . En déduire f .

Exercice 1071

Centrale 2015

Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t^2}}{t^2 + x} dt$.

- Justifier la définition de f .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 . Trouver une équation différentielle vérifiée par f . En déduire f .
- Déterminer les variations de f .

Exercice 1072

Centrale 2010

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-int^2} dt$ converge. *Ind.* Poser $u = t^2$.
- Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ si $t \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi(0) = f'(0)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$.
- Soit $u_n = \int_0^1 f(t) e^{-int^2} dt$. Montrer que $u_n = O(1/n)$.
- Trouver un équivalent de $\sum_{k=0}^N u_k$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Exercice 1073

Centrale 2023 et 2024

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$.

- Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et donner une expression de f avec des fonctions usuelles.
- On pose, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin(t)}{\sqrt{t}} dt$. Déterminer le signe de $I(\alpha)$ en fonction de α .

Exercice 1074

Mines 2013 et 2022

- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t} dt$ est continue sur $[1, +\infty[$, et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.
- Montrer que le graphe de F possède une tangente verticale au point d'abscisse 1.

Exercice 1075

Mines 2013

Soit E l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit $g \in E$. Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe $f \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(f(xt))}{4+t^2} dt$.

- Si $f \in E$, montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(f(xt))}{4+t^2} dt$ est dans E .
- Soit (f_n) définie par : $f_0 : x \mapsto 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = g + T(f_n)$. Étudier cette suite de fonctions et conclure.

**Exercice 1076**

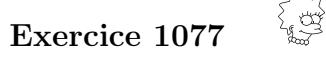
Centrale 2014, 2019, Mines 2023, 2024

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$ et $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.

a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

b) Vérifier qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) + C$.

c) Prouver que $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} h(t) \sin(xt) dt$ où h est une fonction à préciser. En déduire C .

**Exercice 1077**

X 2024

Pour $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$.

a) Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.

b) Montrer que $I(x) = \mathcal{O}(x^{-1/4})$ quand x tend vers $+\infty$.

**Exercice 1078**

Mines 2022

a) Déterminer le domaine de définition de $J : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{ch} t)^{-x} dt$.

b) Montrer que J est continue.

c) Calculer $J(1)$ et $J(2)$.

d) Trouver une relation entre $J(x)$ et $J(x+2)$, lorsque $J(x)$ est définie.

e) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J(2p)$ et $J(2p+1)$ à l'aide de factorielles.

**Exercice 1079**

Centrale 2022, Mines 2023

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{t+t^3} dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) La fonction f est-elle continue sur D ?

c) Étudier les variations de f sur D .

d) Déterminer un équivalent de f en 0.

e) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

**Exercice 1080**On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$.

1. Domaine de définition de f .

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer f' .

3. On pose $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$. Calculer g .

4. Calculer $\int_0^1 \frac{(1-t) \ln t}{(1+t)(t^2 + 2\operatorname{ch}(a)t + 1)} dt$.

**Exercice 1081**

Mines 2022

On pose lorsque cela a un sens $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f . Continuité. Limites aux bornes du domaine de

définition.

- b) On note λ la limite de f en $+\infty$. Déterminer un équivalent de $\lambda - f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
-

Exercice 1082  *Centrale 2017, Mines 2023 et 2024* On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t^x) dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de f . Tracer le graphe de f .

b) Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{P_n(x)}$.

- c) Étudier la monotonie de f . Déterminer les limites aux bornes.
-

Exercice 1083  *Centrale 2014, Mines 2015*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n)$.

- a) Nature de la série de terme général a_n ?

- b) En déduire un équivalent simple de u_n .

c) Si $x \in]-1, 0[$, on pose : $I(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$. Justifier l'existence de $I(x)$.

Montrer : $I(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x(x-1)\dots(x-n+1)}{n \times n!}$.

Exercice 1084  *Centrale 2007, Mines 2023* On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.

- a) Déterminer le domaine D de définition de f .

- b) étudier la continuité puis la dérивabilité de f sur D .

- c) Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x \in D$.

d) Pour quels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln(t)} dt$ est-elle convergente ?

Exercice 1085  *Mines 2010*

Soit $\alpha > 0$. $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{x^\alpha + t^3}$ est-elle intégrable sur \mathbb{R}^{+*} ?

Exercice 1086  *Mines 2024*

Soit $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{x+1}} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de F .

- b) Montrer la continuité de F .

- c) Pour $x \geq 1$, donner l'expression de $F(x)$.
-

Exercice 1087  *Centrale 2023*

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.

- a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^+ .

- b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

- c) Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^{+*} et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Exercice 1088  *Mines 2023*
Soient $\alpha > 1$ et $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^\alpha}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
 - La fonction f est-elle intégrable sur son ensemble de définition ?
-

Exercice 1089  *X 2019* Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $g : x \in [0, 1[\mapsto \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$.

- La fonction g est-elle continue sur $[0, 1[$? Peut-on la prolonger par continuité en 1?
 - On suppose f de classe C^1 . La fonction g est-elle toujours de classe C^1 ?
-

Exercice 1090  *X 2019*

Soit $b \in]0, \sqrt{\pi/2}[$. Trouver un équivalent de $\Phi : t \mapsto \int_0^b \sin(x) e^{it \sin(x^2)} dx$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 1091  *X 2024*

On admet le théorème d'approximation de Weierstrass. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b > 0$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a ; a]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$.

- On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in [-b ; b]$. Montrer que $f = 0$.
 - On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-b ; b]$. Montrer que $f = 0$.
-

Exercice 1092  *Centrale 2009* Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$. Soient $T > 0$ et $F : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+nT)$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et continue.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. Montrer : $\int_0^T F(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx$.

Exercice 1093  *X 2004* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, intégrable sur \mathbb{R} et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

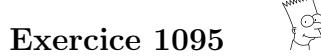
On pose : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{1+(x+g(t))^2} dt$. a) Que peut-on dire de F ?

b) Montrer que F est intégrable sur \mathbb{R} et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$.

Exercice 1094  *Mines 2024*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-|x-t|} dt$.

- Montrer que g est définie sur \mathbb{R} et bornée.
- Montrer que g est de classe C^2 et vérifie l'équation différentielle $(*) : y'' - y = f(x)$.
- Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et bornée sur \mathbb{R} vérifiant l'équation $(*)$. A-t-on $g = h$?

**Exercice 1095**

X 2023

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

- a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$.
- b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (\zeta(2k) - \zeta(2k+1))$.

**Exercice 1096**

Ens 2024

a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.

b) Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

c) Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donner un développement asymptotique de $\ln(\Gamma(n+1))$ à la précision $O(\ln(n))$.

En considérant la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Ind. On admet que l'on peut « dériver » le développement précédent c'est-à-dire que $\Psi(n+1) = \ln(n) + O(1/n)$.

d) Montrer que Ψ est croissante et justifier le développement admis précédemment.

**Exercice 1097**

Ens 2010

Soit $\Gamma : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de Γ . Montrer que : $\forall z \in D, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Déterminer un équivalent de $\Gamma(z)$ quand $z \rightarrow 0$.

On cherche à prolonger Γ à une partie aussi vaste que possible de \mathbb{C} . Soit φ coïncidant avec Γ sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et vérifiant $\varphi(z+1) = z\varphi(z)$.

2. Déterminer le domaine de définition de φ . La fonction φ est-elle continue ? Déterminer un équivalent de $\varphi(z)$ en $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 1098**

Centrale 2019

Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{it}}{x^2 + t^2} dt$.

a) Montrer que f est bien définie et que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1+u^2} du$.

b) Montrer que f est bornée et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right)$. En déduire $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f''(x) = f(x)$.

d) En déduire une expression simple de $f(x)$.

**Exercice 1099**

Mines 2022 et 2024

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. Pour $x > 0$, on pose $N_f(x) = \left(\int_0^1 f(t)^x dt \right)^{1/x}$.

a) Montrer que N_f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .

b) Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

c) Déterminer la limite $\frac{1}{x} \left(\int_0^1 f(t)^x dt - 1 \right)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

d) Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Exercice 1100  Ens 2024

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose qu'il existe des constantes $C_1, C_2, a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^a}$ et $|g(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^b}$.

Lorsque c'est possible, on pose $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$.

a) À quelle condition sur C_1, C_2, a, b la fonction $f * g$ est-elle définie sur \mathbb{R} ?

b) On suppose maintenant a et b strictement supérieurs à 1. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f * g(x)| \leq \frac{C_3}{(1+|x|)^{\min(a,b)}}$.

Exercice 1101  Ens 2018 et 2023, Mines et Centrale 2022

Soit a, b des réels tels que $a < b$, et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée strictement positive. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $x \mapsto e^{-x_0\varphi(t)} f(t)$ soit intégrable sur $[a, b]$.

a) Montrer que $t \mapsto e^{-x\varphi(t)} f(t)$ est intégrable sur $[a, b]$ pour tout réel $x \geq x_0$.

b) Montrer que si $a = 0$ alors $\int_0^b e^{-tx} f(t) dt = \frac{f(0)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Donner plus généralement un développement asymptotique de $\int_a^b e^{-x\varphi(t)} f(t) dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1102  X 2015 Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $s(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $s(x) = -1$ si $x < 0$.

On pose $G : \lambda \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} s(x\lambda - 1) \frac{\sin(\pi\lambda x)}{\sin(\pi x)} dx$. Déterminer la limite de $G(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Exercice 1103  Ens 2021

Soit f une fonction continue et intégrable de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer l'existence de $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Montrer que F détermine f .

Exercice 1104  X 2023

Soient $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^1 K(x, z) g(z) dz$ et $g(x) = \int_0^1 K(x, z) f(z) dz$. Montrer que $f = g$.
