PC $\overset{\star}{2}$

Feuille n° 15 : Dirichlétude

« Dirichlet allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß, weiß, was ein vollkommen strenger Beweis ist, sondern wir lernen es erst von ihm. »,
Brief von Carl Gustav Jakob Jacobi an Alexander von Humboldt, 21. Dezember 1846.

Exercice 1045 *Dirichlet*[1] *Mines 2018, Centrale 2024* On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 1046 *Centrale 2012, Mines 2016, 2017 et 2024 - Dirichlet (Bis)*[2] Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\, e^{-t} dt$.

a) Existence, domaine de définition, continuité. La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer g' et g.

b) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$. Existence de f. Exprimer f en fonction de g. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 1047 *Mines 2016 - Dirichlet (Ter)*[3]

Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ et $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-at}(\cos a + t \sin a)}{1+t^2} dt$.

a) Justifier l'existence de $I(a)$ et de $J(a)$. b) Montrer que $I(a) = J(a)$. c) Qu'obtient-on lorsque $a \to +\infty$?

Exercice 1048 *Dirichlet (Quater)*[4] Montrer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos t} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Conclusion

---

Exercice 1049 *Centrale 2016 - Dirichlet (Quinquies)*[5] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt$.

a) Déterminer le domaine de définition de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine D à préciser.
b) Montrer que F est solution d'une équation différentielle. c) La résoudre. En déduire un résultat inédit.

Exercice 1050 *Centrale 2016, Mines 2017 et 2018, X 2020 - Dirichlet (Sexies)*[6]

a) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et solutions de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.
b) Montrer que f et g sont continues en 0. c) Devinez la suite ...

Exercice 1051 *Centrale 2016, X 2022 - Dirichlet (Septies)*[7]

Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$, $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, e^{-xt} dt$. a) Définition de I et J ? Montrer que $I = J$. b) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. c) Intuiter la question suivante ...

1. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet 1805 Duren 1859 Gottingen
2. Dirichlet est un élève brillant, qui achève ses études secondaires à 16 ans. Devant la faible qualité des formations universitaires allemandes à cette époque, Dirichlet décide de partir étudier à Paris, emportant avec lui les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss comme une bible.
3. A Paris, Dirichlet rencontre quelques-uns des plus grands mathématiciens, dont Legendre, Poisson, Laplace et Fourier. Ce dernier surtout impressionnera beaucoup Dirichlet, et sera à l'origine de l'intérêt qu'il portera à ses séries et à la physique mathématique.
4. En 1825, il initie la preuve du cas n=5 dans le théorème de Fermat, preuve achevée par Legendre dans la foulée.
5. Fin 1825, Dirichlet décide de retourner en Allemagne où il enseignera à Berlin. Parmi ses élèves, on retiendra les noms de Kronecker (tout un symbole !) et Riemann (fan de séries).
6. On lui doit notamment le principe des tiroirs : pour trouver ses chaussettes le matin ,
7. ainsi que le premier énoncé d'une condition suffisante de convergence d'une série de Fourier ,

---

Exercice 1052  *Centrale 2014 et 2017 - Dirichlet (Octies)*[8][9]

Soient $\varphi : x \mapsto (\sin x)/x$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^n \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution d'une EDL d'ordre 2. En déduire une expression de f_n.
c) Calculer $F(x)$. d) qu'en conjecture-t-on ?

Exercice 1053  *Mines 2017, Centrale 2024 - Dirichlet (Novies)*[10] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Déterminer les limites de F, F' et F'' en $+\infty$. c) Exprimer $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$. d) Guess what ?

Exercice 1054  *Mines 2023 et 2024* On pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} \mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de g. Étudier la parité de g. Que vaut $g(0)$?
b) Montrer que, pour tout réel x, $g(x) = g(1)\,|x|$. c) En déduire g.

Exercice 1055  *X 2020, Mines 2023*

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{k^2x^2}{n^2}} \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{k^2x^2}{n^2}}$.

b) On pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

c) Exprimer $g(x)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 1056  *X 2012* Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-x^2/\cos^2 u} du$.

a) Montrer que $f^2 + g$ est constante. b) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.[11].

Exercice 1057  *Centrale 2011*

a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(u^2) du$ existent[12] et sont > 0.

b) Montrer que $F : x \mapsto i \displaystyle\int_0^1 e^{ix^2(t^2+1)} dt + \left(\int_0^x e^{iu^2} du\right)^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $F'(x)$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2t^2}}{1+t^2} dt \to 0$ quand $x \to +\infty$. Conclure.

---

8. et également le théorème de prolongement des fonctions harmoniques définies sur la frontière d'un ouvert. Toute une classe d'équations aux dérivées partielles porte le nom de problème de Dirichlet...
9. Remarque concernant le nom de famille de Dirichlet, Lejeune-Dirichlet : le grand-père de Dirichlet habitait en effet la ville de Richelet, près de Liège en Belgique, et quand le jeune Peter-Gustav trainaît dans les rues de Duren, ses *Disquisitiones Arithmeticae* sous le bras, les gens avaient pris l'habitude de le surnommer "Le jeune de Richelet".
10. Un cratère de la lune et un astéroïde (le 11665) portent le nom de Dirichlet
11. pour varier les plaisirs !
12. Ce sont les intégrales d'Augustin Fresnel