« Der Mensch ist nichts anderes als die ganze Reihe seiner Taten. [1] », Hegel , *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften, 1817.*

Les basiques

Exercice 1144 *Mines 2022*

a) Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum nx^n$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Convergence et somme de la série $\sum nx^n e^{-nx}$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 1145 *Mines 2022*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{sh}(n)\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Exercice 1146 *Mines 2022*

a) Développer $f : x \mapsto e^x \sin x$ en série entière de deux façons différentes.

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\,\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 1147 *Mines 2016 et 2019*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

a) Nature de la série de terme général a_n ? de la série de terme général $(-1)^n a_n$?

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 1148 *Centrale 2012*

Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$?

Exercice 1149 *Centrale 2023*

a) Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

b) Développer $\arcsin(x)$ en série entière.

Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$

1. « L'homme n'est rien d'autre que l'entière série de ses actes », Hegel, *Encyclopédie des sciences philosophiques* , 1817.

Exercice 1150 *Mines 2010* Montrer que $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$ est DSE.

Exercice 1151 *Nombres de Catalan*[2] *- Centrale 2010* Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et S la somme pour $|x| < R$.

1. On suppose $R > 0$. Montrer que $S(x) = x + S(x)^2$.
2. En déduire une expression de $S(x)$ ainsi que le rayon R.
3. Montrer : $\forall n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le produit P_n de n éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans cet ordre. Dénombrer le nombre c_n de parenthésages possibles pour calculer ce produit par multiplications successives.
   Par exemple : $c_2 = 1$; $p_3 = (x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$ donc $c_3 = 2$;
   $p_4 = x_1(x_2(x_3x_4)) = x_1((x_2x_3)x_4) = (x_1x_2)(x_3x_4) = ((x_1x_2)x_3)x_4 = (x_1(x_2x_3))x_4$ donc $c_4 = 5$.
   Montrer : $\forall n \geqslant 1$, $a_n = c_n$.

Les incontournables

Exercice 1152 *X 2023*
Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{n+3}{n+2}a_{n+1} + \dfrac{3n+7}{n+1}a_n$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est strictement positif et trouver un minorant de ce rayon.

Exercice 1153 *Mines 2011 et 2019, Centrale 2011 et 2014* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} dt$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer son rayon.
c) Montrer : $\forall x \in D$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}$.

Exercice 1154 *Mines 2019*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} \mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

---

2. Eugène Charles Catalan : 1814 Bruges - 1894 Liège : mathématicien franco-belge. Il entre à l'X en 1833 et s'en fait expulser l'année suivante à cause de ses idées fortement marquées à gauche. En 1844, il énonce la conjecture suivante, qui deviendra célèbre : deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes... Elle a été démontrée en 2002 par Preda Mihailescu.

Exercice 1155 *Mines 2023*
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{ch}\,(2tx)\,\mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition de F.
b) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}t$ avec $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que $I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}$.
c) Exprimer F sous la forme d'une série entière.
d) Trouver une équation différentielle vérifiée par F. En déduire une expression de F sans symbole intégrale.

Exercice 1156 *X 2010 et 2011, Ens 2014*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
On suppose que la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et qu'elle diverge en $x = 1$.

1. Montrer que $\sum a_n x^n \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$.
2. On suppose que $a_n \sim b_n$. Montrer que $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ lorsque $x \to 1$.
3. Applications :
   (a) Déterminer un équivalent de $\sum n^k\, x^n$ lorsque $x \to 1$ pour $k > 0$.
   (b) Déterminer un équivalent de $\sum \sin(\frac{1}{n})\, x^n$ lorsque $x \to 1$.
   (c) Déterminer un équivalent de $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})\, x^n$ lorsque $x \to 1$. En déduire un équivalent de $\sum \ln n\, x^n$ au voisinage de 1.
   (d) Déterminer un équivalent de $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ lorsque $x \to 1$.
4. Donner un résultat du même ordre pour deux séries entières de rayon de convergence infini (préciser les hypothèses).
   En déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 1157 *X 2018, Ens 2022* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.
a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
b) Montrer que $f(x) = o(e^x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 1158 *Mines 2022*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite nulle.
a) Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
b) Montrer que $\sum a_n x^n \underset{x\to 1^-}{=} o((\ln(1-x)))$.

Exercice 1159 *Mines 2017*
On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$ et, pour tout n, $a_n = \dfrac{-1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$ et $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
a) Montrer que, pour tout n, $a_n \in \mathbb{Q}$.
b) Montrer que le rayon de convergence de cette série est ≥ 1.
c)Montrer que, si $|z| < 1$, $f(z) = \dfrac{2}{e^z + 1}$. En déduire que $R = \pi$.

Exercice 1160 *Mines 2011, X 2015 et 2022, Centrale 2019*

Domaine de définition et équivalent en 1^- de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

Exercice 1161 *Mines 2011, 2015, Centrale 2023*

On cherche à calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et trouver une équation différentielle du 1^{er} ordre satisfaite par f.
2. Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ et en déduire S.

Exercice 1162 *CCP 2005, X 2006 et 2012* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f.

1. Montrer que pour $p \in \mathbb{Z}$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$.
2. On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $|a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$. En déduire que f est une fonction constante.
3. On suppose qu'il existe des réels $a > 0$, $b > 0$, et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant a|z|^q + b$. Montrer que f est une fonction polynomiale.
4. On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant \exp(\mathrm{Re}(z))$. Montrer que : $\exists K \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = Ke^z$.

Les autres

Exercice 1163 *Mines 2022*

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt[4]{x}) - \cos(\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$, $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sh}\left(\sqrt[4]{\dfrac{-x}{4}}\right)\,\sin\left(\sqrt[4]{\dfrac{-x}{4}}\right)}{\sqrt{-x}}$.

Montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1164 *Centrale 2014*

a) Montrer la convergence de la suite de terme général $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. On note γ sa limite.

b) Montrer la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - 2\lfloor n/2 \rfloor}{n(n+1)}$.

c) Rayon de convergence et expression simple de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - 2\lfloor n/2 \rfloor}{n(n+1)}\, x^n$.

Exercice 1165 *Mines 2014*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $s(n)$ le nombre de chiffres de n. Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}\, x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de S.

b) La série de terme général $\dfrac{s(n)}{n(n+1)}$ est-elle convergente ?

Exercice 1166 *Mines 2022* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2.

a) Montrer que $x \mapsto e^{P(x)}$ est la somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$, dont on notera $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des coefficients.

b) Montrer que (a_n) ne possède pas deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 1167 *X 2018* Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

Exercice 1168 *Mines 2017 et 2019*

Soient (a_n) une suite de réels > 0 et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose $n\left(\dfrac{{a_n}^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

a) Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

b) Si $\ell = 0$, peut-on conclure ?

Exercice 1169 *X 2018* RCV et somme de $\sum a_n z^n$ avec $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$.

Exercice 1170 *X 2006 et 2023, Centrale 2017* On considère $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2^k}$.

a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? b) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x^2)$.

c) Que dire de la limite en 1 si elle existe ?

d) S'il existe $x_0 \in \,]-1, 1[$ tel que $f(x_0) > \dfrac{1}{2}$, montrer que f n'a pas de limite en 1.

(☞ on pourra utiliser une relation entre $f(x)$ et $f(x^4)$).

e) On a : $f(0,995) > 0,5008$. Qu'en conclure ? Comment a-t-on pu vérifier cette inégalité ?

Exercice 1171 *Mines 2013 et 2023*

Soit (a_n) une suite de complexes tous non nuls. Soient R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.

a) Montrer que si R et R' sont finis alors $RR' \leqslant 1$.

b) Trouver un exemple avec $0 < RR' < 1$.

Exercice 1172 *Comparaison des rayons de convergence*

Soit a_n à termes positifs. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R_a ainsi que la série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence R_b où b_n est fonction de a_n.

Dans chacun des cas suivants, déterminer R_b en fonction de R_a.

1. $b_n = na_n$.
2. $b_n = 2^n a_n$.
3. $b_n = a_n^2$.
4. $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$.
5. $b_n = a_{2n}$.
6. $b_n = \displaystyle\int_0^{a_n} \frac{dt}{1+t^3}$.

Exercice 1173 *Centrale 2005*
Soit $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum na_n$ soit absolument convergente.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1. On note $f(z)$ la somme de cette série pour $z \in D$.
2. On suppose $(*)$: $a_1 \neq 0$ et $|a_1| \geqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n||z|^n$ pour $z \in D$. Montrer que f est injective sur D.
3. Etudier le cas $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3}$.
4. Donner une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum na_n$ soit absolument convergente, que f soit injective dans D et ne vérifie pas la condition $(*)$.

Exercice 1174 *Mines 2019 et 2023*
Développer en série entière au voisinage de l'origine $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t$.

Exercice 1175 *Mines 2023*
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, après avoir justifié son existence.
b) Développer F en série entière et donner son rayon de convergence.
c) établir une équation différentielle linéaire dont F est solution et en déduire une autre expression de F.

Exercice 1176 *X MP 1981* Soit une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\forall n,\ b_n \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \beta$ avec $|\beta| < R$.

On considère $c_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n} = f(\beta)$.

Exercice 1177 *Mines 2019 et 2023*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n}\mathrm{d}t$.

a) Justifier la définition de u_n.
b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
c) étudier la convergence en R et en $-R$.

Exercice 1178 *Centrale 2013, Mines 2016* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.

a) Montrer, pour $n \geqslant 2$: $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.
b) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$: $1/(n+1) \leqslant W_n \leqslant \pi/2$.
c) Déterminer le rayon de convergence de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$.
d) Calculer la somme de cette série entière en utilisant $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x\cos t}$.

Exercice 1179 *Mines 2011 et 2014* Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^n t}$.

a) Justifier l'existence de a_n.
b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$.
c) Déterminer la limite de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ quand $x \to R^-$.

Exercice 1180 *Centrale 2011*

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ et de $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n dt$.
b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} dt$. Calculer les vingt premiers termes de cette suite ; faire une conjecture sur le comportement de la suite de terme général $I_n/n!$.
c) Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. Déterminer le domaine de définition de g. Montrer que g est DSE au voisinage de 0 et exprimer ce développement à l'aide des I_n. Déterminer son RCV.

Exercice 1181 *X 2013* Soit pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}$. On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n z^n$.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de cette série entière.

Exercice 1182 *Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le nombre de $(n+1)$-uplets $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $a_1 + \dots + a_{n+1} = n$.
a) On admet provisoirement que $p_n = \displaystyle\binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver le domaine de convergence et la valeur de la somme de la série entière $\displaystyle\sum \frac{p_n}{4^n} x^n$.
b) Démontrer la formule admise à la question précédente.

Exercice 1183 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, x^n}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)}$ (☞ Penser à John Wallis.[3]).

---

3. John Wallis 1616 Ashford - 1703 Oxford, Angleterre : On lui doit la notation ∞ pour désigner l'infini. Dans son ouvrage *Arithmetica Infinitorum 1656*, il établit la formule $\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7} \dots \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1} \dots = \frac{\pi}{2}$ avant de s'embarquer pour le Pacifique sud avec son ami physicien et écossais Edward Futuna.

Exercice 1184  *Centrale 2012, 2016 et 2018, Mines 2023*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.
b) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
c) Donner une expression simple de f et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 1185  *Centrale 2007* Si $n \in \mathbb{N}^*$, soient $d_n = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N}^*,\ k|n\}$ et $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$.

Soient $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Donner une relation simple entre f et g.
3. Déterminer les limites en 1^- de f et de g.
4. Tracer les graphes de f et de g.
5. Montrer que $D_n \sim nH_n$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (☞ On pourra utiliser : $a(n,k) = 1$ si $k|n$ et 0 sinon).

Exercice 1186  *X 2006, Mines 2011* Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres complexes définies par u_0, v_0 et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n - v_n$, $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.

1. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$.
2. Calculer la somme de ces séries.

Exercice 1187  *Centrale 2007, 2011, 2015 et 2022, Mines 2012*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + \dfrac{2}{n+1} a_{n-2}$.
a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.
b) Déterminer le rayon de convergence et donner une expression simple de : $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 1188  *Mines 2015 et 2019*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant : $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
a) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
c) Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.
Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on dit que σ est *alternante montante* si $\sigma(1) < \sigma(2)$, $\sigma(2) > \sigma(3)$, $\sigma(3) < \sigma(4)$... On dit que σ est alternante descendante si $\sigma(1) > \sigma(2)$, $\sigma(2) < \sigma(3)$, $\sigma(3) > \sigma(4)$... On note b_n (resp. c_n) le cardinal de l'ensemble des permutations alternantes montantes (resp. alternantes descendantes). Exprimer b_{n+1} en fonction des b_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $b_0 = 1$.

Exercice 1189 *X 2017*

Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$ ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose $a_0 = 1$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
b) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.
c) Exprimer $f(x)$.

Exercice 1190 *Mines 2022*

On pose $J : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que J est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$.
b) Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ qui sont développables en série entière autour de 0.

Exercice 1191 *Mines 2022*

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}\, x^{2n+1}$.

On note f sa somme dans la suite.
b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$ sur un intervalle à préciser.
c) Préciser le domaine de définition de f et donner une expression simplifiée de f.

Exercice 1192 *Mines 2010, 2011 et 2012* Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n = 0$.

Exercice 1193 *Centrale 2009* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. La fonction f est-elle continue sur D ?
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1194 *Centrale 2011* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in^2x}2^{-n}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ et $G_p : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.
b) Calculer a_k pour $0 \leqslant k \leqslant 9$. Représenter G_k pour $1 \leqslant k \leqslant 5$.
c) Montrer que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 1195 *Centrale 2022*

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

a) Déterminer les rayons de convergence R et R' de f et g.
b) Calculer $\lim\limits_{x \to R} f(x)$.
c) Montrer que $|f(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{1}{1-|x|}$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ en 1.

Exercice 1196 *Mines et Centrale 2022*
Soient $q \in \,]-1,1[$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-qx)f(qx)$ et $f(0) = 1$. La fonction f est-elle développable en série entière ?

Exercice 1197 *Centrale 2023*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \arctan\left(\frac{\sin(t)}{x+\cos(t)}\right) \mathrm{d}t$. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
a) Montrer que $f(1) - f(0) = -\dfrac{3}{4} I$.
b) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1198 *Centrale 2011, Mines 2022*
Existence, limite et équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2} dt$.

Exercice 1199 *Mines et Ens 2019*
Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$. On pose, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
a) Montrer l'existence de I. b) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.
c) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ que l'on déterminera tels que $I = a + b\,\zeta(2)$.
d) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 3$. Donner une intégrale I_k pour laquelle existent des rationnels $a_1, \ldots, a_k$ avec $a_k \neq 0$ tels que $I_k = a_1 + \displaystyle\sum_{j=2}^{k} a_j \zeta(j)$.

Exercice 1200 *ENS Lyon 2006* Soit $\Phi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que Φ existe et définit un produit scalaire sur un espace convenable.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et y développable en série entière sur $\mathbb{R}$ tels que : $(\exp(-x^2)y'(x))' + \lambda \exp(-x^2)y(x) = 0$ et $y(x) = O(x^k)$ en $\pm\infty$.
3. En déduire une suite de fonctions développables en série entière orthonormale pour Φ.

Exercice 1201 *X 2006 PSI*

1. Soit $y \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$. Montrer que $y \text{ cotan}\, y = \dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{e^z - 1}$ où $z = 2iy$.

2. Montrer que $\dfrac{e^z - 1}{z}$ est développable en série entière en 0.

   On admettra que son inverse $\dfrac{z}{e^z - 1}$ l'est aussi et on pose $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$.
   Trouver une relation de récurrence entre les B_k. Calculer B_0, B_1 et B_2.

3. Pour $y \in], [$ on pose $g(y) = 1 - 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2}$. Montrer que $g(y) = 1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\, y^{2k}$.

4. On admet que $g(y) = y \operatorname{cotan} y$. En déduire une expression de $\zeta(2k)$ en fonction des B_{2k}.

Exercice 1202 *Ens 2023*

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon > 1. Soient $\varphi \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(y) f(x - y)\, \mathrm{d}y$. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1203 *X 2019* a) Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$. Est-elle développable en série entière autour de 0 ?
b) Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que g est développable en série entière dans un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $a > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on ait $|g^{(n)}(x)| \leq a^n n!$.
c) On revient à la fonction f de la question a). Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\displaystyle\sup_{|x| \leq \eta} |f^{(n)}(x)| \geq (n!)^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 1204 *Centrale 2023*
a) Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de complexes de limite nulle.
Montrer : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$.
Dans la suite, $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de complexes telle que $\lim_{n \to +\infty} n a_n = 0$.
b) Montrer que $\sum a_n z^n$ converge pour tout complexe z tel que $|z| < 1$.
Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
c) On suppose que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.
Ind. Pour $t \in [0,1]$, montrer que $1 - t^n \leqslant n(1 - t)$.

Exercice 1205 *Centrale 2022*

Soit (a_n) une suite bornée de réels. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

b) On suppose que les nombres a_n sont positifs et que la série $\sum a_n$ converge.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

c) On suppose que les nombres a_n sont positifs et que la série $\sum a_n$ diverge.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

Exercice 1206 *X 2009, 2012 et 2023, Ens 2015*
étudier la limite de $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k!}$ lorsque x tend vers 1^-.

Exercice 1207 *X 2011* Soient D le disque fermé unité et $F : D \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R = 1$. On suppose que F est nulle sur le cercle unité et que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall (x, y) \in D^2$, $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon$. Montrer que F est nulle sur D.

Exercice 1208 *X 2006, Centrale 2018*
Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ les sommes de deux séries entières de RCV $R > 0$.
a) Montrer que s'il existe une suite (z_i) de complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, alors f est identiquement nulle.
b) Montrer que si $f(z)g(z) = 0, \forall z \in D(O, R)$, alors l'une des deux fonctions est identiquement nulle.

Exercice 1209 *X 2009*
Soient D (resp. $\overline{D}$) le disque unité ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$. Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue.

1. On suppose que f est développable en série entière sur D et que f est nulle sur le cercle unité. Montrer que f est nulle sur $\overline{D}$.
2. On suppose que f est développable en série entière sur D et que f est nulle sur un arc de longueur non nulle du cercle unité.
   Montrer que f est nulle sur $\overline{D}$.

Exercice 1210 *X 2023*
Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ et $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_k$. On considère les assertions :
(i) la suite (σ_n) converge,
(ii) $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$, et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ existe (et est finie).
A-t-on (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? A-t-on (ii) $\Longrightarrow$ (i) ?

Exercice 1211 *Centrale 2023*
a) Déterminer une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ telle qu'on ait $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence et le domaine de validité de l'égalité ci-dessus.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Prouver que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \right)^2 = I_n + A$.
c) Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quelconque, l'équation $X^2 = B$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 1212 *Ens 2017* a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \underset{n \to +\infty}{=} O(\sqrt{n})$.
b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} z^k$ converge si $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1213 *Mines 2019*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^n$. On suppose que la série entière $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non nuls tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, on ait $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.
Montrer que, pour n assez grand, le déterminant de la matrice $(a_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est nul.

Exercice 1214 *X 2009*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $E_n = \left\{(e_1, \dots, e_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n} \;,\; \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} e_i = 0\right\}$, $\quad a_n = \text{Card }(E_n)$,

$F_n = \left\{(e_1, \dots, e_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n} \;,\; \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} e_i = 0 \text{ et } \forall p \in \{1, \dots, n-1\}, \sum_{i=1}^{2p} e_i \neq 0\right\}$ et $\quad b_n = \text{Card }(F_n)$.

1. Déterminer a_n. On pose $a_0 = 1$.
2. Montrer que : $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}$. Soient $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de f. Donner une relation entre f et g.
4. Développer en série entière $\sqrt{1-4x}$.
5. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 1215 *Centrale 2022*

Une involution d'un ensemble X est une fonction $f : X \to X$ telle que $f \circ f = Id_X$. On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$.
a) Trouver une relation de récurrence sur $(I_n)_n$ (reliant trois termes consécutifs).
b) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence strictement positif.
c) En déduire que $I_n = \dfrac{\mathrm{d}^n e^{x+\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{d}x^n}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1216 *X 2015, Mines 2018 et 2019*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = B_1 = 1$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.
b) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
c) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
d) En déduire que B_n s'écrit comme somme d'une série.

Exercice 1217 *X 2023*

Soit c_n le nombre de listes $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers telles que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$ et $\forall i \in \{1, \dots n-1\}$, $a_{i+1} \neq a_i + 1$.
a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, on a $c_n = (n-1)c_{n-1} + (n-2)c_{n-2}$.
b) Montrer que la suite $\left(\frac{c_n}{n!}\right)$ converge vers une limite non nulle.

Exercice 1218  *Mines 2023*

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

Montrer que, pour $|z| < 1$, $L(z) = \ln\left(|1+z|\right) + i \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{1+\mathrm{Re}(z)}\right)$. *Ind.* Considérer $f_z : t \in [0,1] \mapsto L(tz)$.

Exercice 1219  *Mines 2015*

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n}\, x^n$.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f(x)$.

Exercice 1220  *Ens 2017*

Soient $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$ et $\Omega = \{re^{i\theta}\,;\, 0 \leq r \leq 1, -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de f.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$. Montrer que (S_n) converge uniformément vers f sur Ω.

Ind. Majorer $T_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} z^k$ sur Ω et écrire $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(z) - T_n(z)}{k}$.

c) On fixe $\theta \in]-\pi, \pi[$. Soit $\ell : x \in [0,1[\mapsto f(x\, e^{i\theta})$. Calculer ℓ'.

d) Montrer que $x \mapsto e^{\ell(x)}$ a une dérivée seconde nulle.

e) En déduire la valeur de $f(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.