



« Non riesco più a capire quali siano i parametri per valutare un giocatore. », Gianluigi Buffon, *Gazzetta dello Sport*, juillet 2017.

LES BASIQUES

Exercice 1079 Mines 2022

- a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3+x^3}$.
 b) Montrer que f est continue. c) Calculer $f(0)$.

Exercice 1080 X 2017 Soit $I : \alpha \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.

- a) Justifier la définition de I . Calculer $I(0)$.
 b) Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.
 c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 1081 X 2017 Soit $F : a \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$.

- a) Montrer que F est bien définie.
 b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
 c) Déterminer la limite ℓ de F en 0^+ , puis un équivalent de $F - \ell$.

Exercice 1082 Mines 2023

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de F .
 b) Montrer que F est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
 c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
 d) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$ en étudiant $x \mapsto x F(x)$.
 e) Déterminer la limite et un équivalent de F en 0.

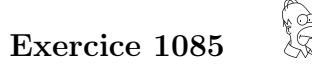
Exercice 1083 Mines 2023

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh}(t)}{t} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de F .
 b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
 c) Trouver une expression simplifiée de F .

Exercice 1084 γ Mines 2011

- a) Calculer $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.
 b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt = \gamma$.

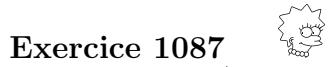
**Exercice 1085**

Mines 2015, Centrale 2015 et 2023

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.

Mines 2022 Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{x^t}{1+t^2} dt$.Déterminer le domaine de définition de la fonction f . Etudier sa continuité et sa dérivabilité. Calculer f .

LES INCONTOURNABLES

**Exercice 1087**

Mines 2008, 2010, 2012, 2015 et 2016, Centrale 2016 et 2022

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Donner des équivalents de f quand $x \rightarrow 0^+$ et quand $x \rightarrow +\infty$.
- Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .

**Exercice 1088**Centrale 2005, 2011 et 2013, X 2016, Mines 2019 : Fonction $\Gamma\zeta$ d'Eumann et Rieger

On pose : $g(x, t) = \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$.

- Domaine de définition de F ?
- Vérifier que pour $x > 1$ on a $g(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$.
- En déduire que pour tout $x > 1$, $F(x) = \Gamma(x)\zeta(x)$ puis que F est de classe \mathcal{C}^∞ .

**Exercice 1089**

X 2006

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$.**Exercice 1090**

Mines 2009, 2010 et 2016

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C}) ; \forall s > 0, u \mapsto \frac{f(u)}{u+s} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \right\}$.

On note, pour $s > 0$, $\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} du$.

- Soit L l'ensemble des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^{+*} . Comparer L à E .
- Soit $f_\alpha : u \mapsto u^{\alpha-1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f_\alpha \in E$?
- Soit α tel que $f_\alpha \in E$. Montrer que \hat{f}_α est continue sur \mathbb{R}^{+*} et donner sa limite en $+\infty$.
- Soit f dans E . Montrer que \hat{f} est continue sur \mathbb{R}^{+*} . Déterminer la limite de \hat{f} en $+\infty$.

**Exercice 1091**

Mines 2009, 2010, 2013, 2017, 2022, X 2022

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

- Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et impaire.
- Montrer que F est dérivable et écrire F' sans symbole d'intégration.
- En déduire F et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 1092  *X 2009 et 2015, Centrale 2013, Mines 2017, 2018, 2022 et 2023*
Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Montrer que f est bien définie. Étudier la monotonie de f .
 2. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x+1) + f(x)$.
 3. Donner des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.
-

Exercice 1093  *Mines 2023*
Soit, pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} dt$.
a) Montrer la continuité de F .
b) Montrer que $F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(nx)^2 + 1}$.
c) Donner la limite puis un équivalent de F en $+\infty$.
d) Avec une comparaison série-intégrale, montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

LES AUTRES

Exercice 1094  *Centrale 2011 et 2023, Mines 2012, 2013 et 2016*
On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}) dt$.
Définition, continuité, dérivabilité. Trouver une EDL du 1er ordre satisfaite par f . En déduire f .

Exercice 1095  *Centrale 2015* Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{t^2 + x} dt$.
a) Justifier la définition de f .
b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 . Trouver une équation différentielle vérifiée par f . En déduire f .
c) Déterminer les variations de f .

Exercice 1096  *Mines 2022*
Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.
a) Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner F' . En déduire une expression de F .
c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

Exercice 1097  *Centrale 2010* Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-int^2} dt$ converge. Ind. Poser $u = t^2$.
2. Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ si $t \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi(0) = f'(0)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$.

3. Soit $u_n = \int_0^1 f(t)e^{-int^2} dt$. Montrer que $u_n = O(1/n)$.

4. Trouver un équivalent de $\sum_{k=0}^N u_k$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Exercice 1098  Centrale 2023

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt$.

a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et donner une expression de f avec des fonctions usuelles.

b) On pose, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin(t)}{\sqrt{t}} dt$. Déterminer le signe de $I(\alpha)$ en fonction de α .

Exercice 1099  Mines 2013 et 2022

a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t} dt$ est continue sur $[1, +\infty[$, et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que le graphe de F possède une tangente verticale au point d'abscisse 1.

Exercice 1100  X 2013 et Mines 2022

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, et $a < b$ dans $[0, 1]$ tels que $f^{-1}(\{0\}) = [a, b]$. On pose $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^1 \sqrt{f(t) + x^2} dt$

a) Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et donner une expression de sa dérivée.
b) Montrer que les fonctions g' et $x \mapsto \frac{g(x) - g(0)}{x}$ ont la même limite en 0^+ .

Exercice 1101  Mines 2015

Soit E l'espace des fonctions bornées de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Si f appartient à E , on pose

$T(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(x + f(t)^3)}{1 + t^2} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de $T(f)$.
b) Montrer que $T(f)$ est continue.
c) Déterminer la limite de $T(f)(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
-

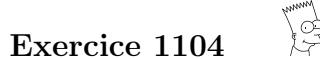
Exercice 1102  Centrale 2023

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

Préciser le domaine de définition de f . Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1103  Centrale 2016 Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t}} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition. Étudier la continuité.
b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
-

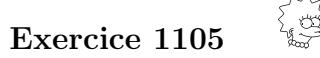
**Exercice 1104***Centrale 2014, 2019, Mines 2023*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$ et $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.

a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

b) Vérifier qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) + C$.

c) Prouver que $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} h(t) \sin(xt) dt$ où h est une fonction à préciser. En déduire C .

**Exercice 1105***Mines 2019*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$. a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . b) Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

**Exercice 1106***Mines 2022*

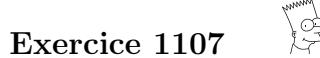
a) Déterminer le domaine de définition de $J : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{ch} t)^{-x} dt$.

b) Montrer que J est continue.

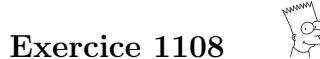
c) Calculer $J(1)$ et $J(2)$.

d) Trouver une relation entre $J(x)$ et $J(x+2)$, lorsque $J(x)$ est définie.

e) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J(2p)$ et $J(2p+1)$ à l'aide de factorielles.

**Exercice 1107***Mines 2022*

Pour $x > 0$, on pose $\Phi(x) = \int_0^x \frac{\ln(x+t)}{\sqrt{x-t}} dt$. Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 1108***Mines 2023*

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)} dt$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b) Montrer, pour $x \in D$, que $f(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{\ln t}{1-t} dt$.

**Exercice 1109**

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$.

1. Domaine de définition de f .
 2. Etudier la dérivabilité de f et calculer f' .
 3. On pose $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$. Calculer g .
 4. Calculer $\int_0^1 \frac{(1-t) \ln t}{(1+t)(t^2 + 2\operatorname{ch}(a)t + 1)} dt$.
-

**Exercice 1110***Mines 2009, 2010 et 2018*

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + x} dt$.

Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Limites et équivalents aux bornes de F ?

Exercice 1111  *Mines 2021* On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \theta) d\theta$.

a) Montrer que I converge. On admet que $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

b) Soient λ et μ deux réels distincts.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(\lambda + X)(\mu + X)}$.

c) Pour $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, on considère $f(a, b) = F_b(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + a^2)}{x^2 + b^2} dx$. (i) Montrer que f est bien définie.

(ii) Soit $b > 0$. Montrer que F_b est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer F'_b .

(iii) Calculer $f(b, b)$; on posera $x = b \tan \theta$. (iv) Calculer $f(a, b)$.

Exercice 1112  *Mines 2022*

Domaine de définition et limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t^x)^{1/x}}$?

Exercice 1113  *Mines 2017* Soit $f : t \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\operatorname{ch} x} dx$.

a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ .

b) Calculer $f(0)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que l'équation $f(t) = n$ admet une unique solution t_n .

d) Déterminer la limite de (t_n) puis la limite de $(t_n / \ln(n))$.

Exercice 1114  *Mines 2022*

On pose lorsque cela a un sens $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f . Continuité. Limites aux bornes du domaine de définition.

b) On note λ la limite de f en $+\infty$. Déterminer un équivalent de $\lambda - f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 1115  *Centrale 2017, Mines 2023*

Soit $\alpha > 0$. On définit $I(\alpha) = \int_0^1 \ln(t) \ln(1 - t^\alpha) dt$.

a) Déterminer le domaine de convergence de $I(\alpha)$.

b) Écrire $I(\alpha)$ comme la somme d'une série.

c) Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0.

d) Déterminer la limite et un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 1116  *Centrale 2014, Mines 2015*

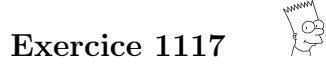
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^* : a_n = \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n)$.

a) Nature de la série de terme général a_n ?

b) En déduire un équivalent simple de u_n .

c) Si $x \in]-1, 0[$, on pose : $I(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$. Justifier l'existence de $I(x)$.

$$\text{Montrer : } I(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x(x-1)\dots(x-n+1)}{n \times n!}.$$



Centrale 2007, Mines 2023

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.

- a) Déterminer le domaine D de définition de f .
 - b) étudier la continuité puis la dérивabilité de f sur D .
 - c) Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x \in D$.
 - d) Pour quels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln(t)} dt$ est-elle convergente ?
-



Mines 2010

Soit $\alpha > 0$. $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{x^\alpha + t^3}$ est-elle intégrable sur \mathbb{R}^{+*} ?



X 2016

Soit $f : t \mapsto \int_0^1 x^{tx} dx$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.



Mines 2019

On pose $G : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)} dt$.

- a) Montrer que G est définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.
 - b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $y \mapsto G(x, y)$ admet une limite finie, notée $G(x)$, quand y tend vers $+\infty$.
 - c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt \right)$.
 - d) On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.
-



Centrale 2023

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.

- a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^+ .
 - b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
 - c) Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^{+*} et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
-



Mines 2023

Soient $\alpha > 1$ et $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^\alpha}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - b) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
 - c) La fonction f est-elle intégrable sur son ensemble de définition ?
-

Exercice 1123  *X 2019* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $g : x \in [0, 1[\mapsto \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$.

- a) La fonction g est-elle continue sur $[0, 1[$? Peut-on la prolonger par continuité en 1?
 b) On suppose f de classe \mathcal{C}^1 . La fonction g est-elle toujours de classe \mathcal{C}^1 ?
-

Exercice 1124  *Centrale 2022* Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|a| \neq r$. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-a} dt$.

Exercice 1125  *X 2019*

Soit $b \in]0, \sqrt{\pi/2}[$. Trouver un équivalent de $\Phi : t \mapsto \int_0^b \sin(x)e^{it \sin(x^2)} dx$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 1126  *Centrale 2022*

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$. Soit B l'espace vectoriel des fonctions bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Pour toute fonction $f \in E$ et

tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$.

a) (i) Montrer que la fonction \hat{f} est bien définie et qu'elle appartient à B .

(ii) Montrer que \hat{f} est continue.

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit $f_\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha t^2}$.

(i) Montrer que $f_\alpha \in E$ et que \hat{f}_α est de classe \mathcal{C}^1 .

(ii) On indique que $\|f_1\|_1 = \sqrt{\pi}$. Calculer \hat{f}_α .

Exercice 1127  *Centrale 2009*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$. Soient $T > 0$ et $F : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+nT)$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et continue.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. Montrer : $\int_0^T F(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx$.

Exercice 1128  *X 2004*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, intégrable sur \mathbb{R} et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On pose : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{1+(x+g(t))^2} dt$. a) Que peut-on dire de F ?

b) Montrer que F est intégrable sur \mathbb{R} et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$.

Exercice 1129  *Ens 2017*

Soit $X = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \underset{\pm\infty}{\rightarrow} 0 \right\}$. Pour $f \in X$, $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $P_t(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t^2}\right) f(y) dy$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Montrer que $P_t(f)(x)$ est bien définie pour $f \in X$, $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $P_t(f) \in X$.

c) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $P_t(f)(x)$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ puis lorsque $t \rightarrow +\infty$.

d) On suppose que les $f^{(k)}$ sont bornées pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer les dérivées successives en 0 de $g : t \mapsto P_t(f)(x)$, en posant $g(0) = f(x)$.

Exercice 1130  *X 2023*

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

- a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$.
- b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (\zeta(2k) - \zeta(2k+1))$.
-

Exercice 1131  *Centrale 2005, 2011, 2013 et 2023*

Soient $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

- a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et sur tout intervalle de la forme $]-k-1, -k[$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = f(x) + g(x)$. Que peut-on en déduire sur Γ ?
- c) Donner un équivalent de Γ en 0.
-

Exercice 1132  *Ens 2010* Soit $\Gamma : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de Γ . Montrer que : $\forall z \in D$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Déterminer un équivalent de $\Gamma(z)$ quand $z \rightarrow 0$.

On cherche à prolonger Γ à une partie aussi vaste que possible de \mathbb{C} . Soit φ coïncidant avec Γ sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et vérifiant $\varphi(z+1) = z\varphi(z)$.

2. Déterminer le domaine de définition de φ . La fonction φ est-elle continue ? Déterminer un équivalent de $\varphi(z)$ en $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
-

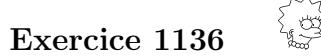
Exercice 1133  *Centrale 2019* Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{it}}{x^2 + t^2} dt$.

- a) Montrer que f est bien définie et que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1+u^2} du$.
- b) Montrer que f est bornée et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.
- c) Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right)$. En déduire $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f''(x) = f(x)$.
- d) En déduire une expression simple de $f(x)$.
-

Exercice 1134  *Mines 2019* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. On pose $F : a \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^1 f(t)^a dt$.

- a) Montrer que F est dérivable. Calculer $F'(0)$.
- b) Déterminer la limite de $a \mapsto (F(a))^{1/a}$ lorsque $a \rightarrow 0^+$.
-

Exercice 1135  *Mines 2018* Trouver f continue telles que $f(x) = \int_0^x \cos(x-y) f(y) dy$



Ens 2018 et 2023

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable sur \mathbb{R}^+ . On pose $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$.

- a) Déterminer la limite de G en $+\infty$.
 b) On suppose que $f(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$, que f est de classe \mathcal{C}^1 et que f' est intégrable. Déterminer un équivalent de $G(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
 c) Dans le cas général, donner un développement asymptotique de $G(x)$ à la précision $o(1/x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
-



Ens 2023

Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$. On définit $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln \left(\int_0^1 e^{xt} g(t) dt \right)$.

- a) Montrer que Φ est convexe.
 b) On suppose maintenant que g est de classe \mathcal{C}^1 . Trouver un équivalent et un développement asymptotique de Φ en $+\infty$.
-

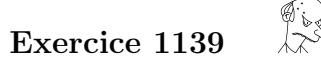


Ens 2018, Mines et Centrale 2022

Soit a, b des réels tels que $a < b$, et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée strictement positive. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $x \mapsto e^{-x_0 \varphi(t)} f(t)$ soit intégrable sur $[a, b]$.

- a) Montrer que $t \mapsto e^{-x \varphi(t)} f(t)$ est intégrable sur $[a, b]$ pour tout réel $x \geqslant x_0$.
 b) Montrer que si $a = 0$ alors $\int_0^b e^{-tx} f(t) dt = \frac{f(0)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
 c) Donner plus généralement un développement asymptotique de $\int_a^b e^{-x \varphi(t)} f(t) dt$ quand x tend vers $+\infty$.
-

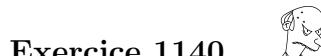


X 2014

Soit $s \in]0, 1[$. Pour $(a, x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on pose : $P(a, x, y, t) = \frac{a y^{2s}}{((x-t)^2 + y^2)^{s+1/2}}$.

- a) Montrer, pour $(a, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrabilité sur \mathbb{R} de $t \mapsto P(a, x, y, t)$.
 b) Montrer l'existence d'un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \int_{-\infty}^{+\infty} P(c, x, y, t) dt = 1$.
 c) Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer : $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} P(c, x, y, t) dt = 0$.
 d) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée. Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on pose : $u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(c, x, y, t) f(t) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $y \mapsto u(x, y)$ a, quand $y \rightarrow 0^+$, une limite dans \mathbb{R} que l'on déterminera.



X 2015

Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $s(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $s(x) = -1$ si $x < 0$.

On pose $G : \lambda \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} s(x\lambda - 1) \frac{\sin(\pi\lambda x)}{\sin(\pi x)} dx$. Déterminer la limite de $G(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Exercice 1141

X 2021

a) Montrer que $C = \int_0^{+\infty} \cos(u^2) du$ est une intégrale convergente.

b) Soient a, b deux réels strictement positifs. Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^1 \cos(n(at^2 + bt^3)) dt$.

Exercice 1142

Ens 2021

Soit f une fonction continue et intégrable de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer l'existence de $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Montrer que F détermine f .

Exercice 1143

X 2023

Soient $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^1 K(x, z)g(z) dz$ et $g(x) = \int_0^1 K(x, z)f(z) dz$. Montrer que $f = g$.
