PC$^\star_2$ **Feuille n° 14 : Série d'exercices à résoudre terme à terme.**

« Life is too short for long-term grudges . », Elon Musk

Les basiques

Exercice 986 *Mines 2024*

Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x^\alpha e^{-n^2 x}$ puis $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Montrer que f_α est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Trouver les α pour lesquels la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
c) Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
d) Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 987 *Centrale 2016*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Exercice 988 *Mines 2018* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sin(\pi/2^n)$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. Exprimer $f'(x)$ pour $x \in D$.
c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ comme somme d'une série.

Exercice 989 *Mines 2019*

a) Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Montrer l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^2 e^{-nu^2} \mathrm{d}u$ et la calculer.

c) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I. Montrer que $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 990 *Mines 2024*

Existence et calcul des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} \mathrm{d}x$.

Les incontournables

Exercice 991 *Centrale 2019 et Mines 2022* Soit a_n une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose $u_k(x) = a_k x^k (1-x)$.
a) Montrer que $\sum u_k$ converge simplement sur $[0,1]$.
b) Montrer que $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $a_k \to 0$.
c) Montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_k}{k}$ converge.
d) En déduire une série de fonctions qui CVU et qui ne CVN pas sur $[0,1]$.

Exercice 992 *X 2007, Mines 2010 et 2014, Centrale 2010 et 2022*
Soient $f_0 \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [a,b]$: $f_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer la convergence de la série de fonction de terme général f_n.
2. Calculer $\displaystyle\sum_n f_n$.

Exercice 993 On pose $S(x) = \displaystyle\sum_n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ pour $x \geqslant 0$.
a) Montrer que S est bien définie. b) Etudier la continuité, puis la dérivabilité de S (en particulier en 0).

Exercice 994 *Mines 2019*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.
a) Montrer que f est définie sur $]-1,1]$, continue sur $]-1,1[$.
b) Soit $x \in]0,1[$. On pose $\varphi_x : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x^t}{1+x^t}$. Montrer que φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t$.
c) En déduire un encadrement de $f(x)$ et la limite de f en 1^-.
d) La série de fonctions définissant f converge-t-elle uniformément sur $]-1,1]$?

Exercice 995 *Mines 2009, 2018 et 2019*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$. Déterminer le domaine de définition D de f.
La fonction f est-elle continue sur D ? Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et $+\infty$.

Exercice 996 *Mines 2017* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$.
a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 997 *Mines 2016* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(nx)}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 998 *Mines 2018*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan}(n)$. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
c) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.
d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 999 *Centrale 2007, 2008, 2009, 2012 et 2023, X 2011, Mines 2012, 2014, 2015, 2019, 2022 et 2023*

On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + xn^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de S. Etudier la continuité et la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to 0^+$.

Exercice 1000 *Mines 2018*

Soient $\varphi : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{4^k}$.

a) Soit $M > 0$. Montrer que S est définie et continue sur $[0, M]$.
b) Soit $x_0 = n2^{-p}$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que S n'est pas dérivable en x_0.
c) Montrer que S n'est dérivable en aucun point.

Exercice 1001 *Mines 2009, 2016, 2018, 2019 et 2023* Soit $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$ quand $t \to 0^+$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
c) Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 1002 *Fonction ζ de Riemann* *Mines 2018*

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.
2. Donner un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand $x \to 1^+$.
3. Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement vers une fonction U continue sur $]0, +\infty[$.
4. Donner un développement limité à deux termes de ζ au voisinage de 1.

Exercice 1003 *Mines 2024*

On considère $J = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que J est bien définie et que $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. En déduire la valeur de J.

Exercice 1004 *Mines 2016, 2017 et 2019*

Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ et calculer sa somme.

Exercice 1005 *Mines 2023*

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$.

Exercice 1006 *Mines 2006 et 2017* a) Existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$?

b) Montrer que $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que la série de terme général R_n converge et calculer sa somme.

Les autres

Exercice 1007 *Ens et X 2023*

Soit $\alpha > 0$. étudier la convergence simple, normale et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$.

Exercice 1008 *X 2016*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{\lfloor \ln(k) \rfloor}$. Étudier la convergence de (f_n).

Exercice 1009 *Centrale 2012*

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : t \in [0,1] \mapsto t^n f(t)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série de terme général u_n converge normalement.

Exercice 1010 *Mines 2022*

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+(2n+1)^2}$.

Exercice 1011 *Mines 2017*

Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nx)\, x^n$.

Exercice 1012 *Centrale 2018* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \left\lfloor \sqrt{\pi/2x} \right\rfloor \times \dfrac{2x}{\pi} - \displaystyle\sum_{k \geqslant \sqrt{\pi/x}} \frac{1}{k^2}$.

c) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1013 *Centrale 2019* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est périodique.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.

d) Tracer le graphe de f.

Exercice 1014 *Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathrm{th}(x+n) - \mathrm{th}(n)$. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

a) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}^+$, continue et strictement croissante.

b) La fonction S admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 1015 *X 2011* Soit $f : x \in [0, 1[\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

a) Justifier la définition de f. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1016 *Mines 2009, 2010, 2012 et 2022* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.

Exercice 1017 *Mines 2019*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$. On pose $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et continue.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \geqslant n$. Montrer que $f(x_0) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

d) Montrer que $f(x)/x \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 1018 *Mines 2022 et 2023 et 2024*

Soit $f : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x-n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+n)^2}$. a) Montrer qu'on définit ainsi une fonction f continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Montrer que f est 1-périodique.

c) Montrer que f vérifie $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$.

d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 1-périodique et vérifiant $(*)$. Montrer que g est la fonction nulle.

e) Montrer que $x \mapsto f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ est continue en 0.

f) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

Exercice 1019 *Centrale 2009* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 1020 *Mines 2018, 2019 et 2023*

Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais qu'elle n'y converge pas normalement.

b) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ est une fonction continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Est-elle dérivable en 0 ?

e) Montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$.

Exercice 1021 *Centrale 2024*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

a) En utilisant la série de fonctions $\sum f_n$, calculer si elle existe la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

b) On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-x})\,\mathrm{d}x$.

c) Équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1022 *Mines 2022*

a) Démontrer que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge simplement sur $[0, 1]$.

La convergence est-elle  ?

Exercice 1023  *Centrale 2024*

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Établir une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.
c) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1024  *Mines 2008 et 2012, Centrale 2010 et X 2011* Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(1 + \frac{x}{n})$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.
3. Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1025  *X 2015, Mines 2015 et 2023* Soient $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\zeta_2 : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

a) Déterminer le domaine de définition de ζ et celui de ζ_2. Montrer que ces fonctions sont continues.
b) Déterminer la valeur de $\zeta_2(1)$.
c) Si $s > 1$, exprimer $\zeta_2(s)$ en fonction de $\zeta(s)$.
d) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

Exercice 1026  *Mines 2023*

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. On pose $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - e^{it}}$.

a) Calculer I en utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$.
b) Calculer I en utilisant une série de fonctions.

Exercice 1027  *Mines 2011 et 2012*

a)Étudier la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{\tan x} dx$. *Ind.* Considérer $v_n = \int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{x} dx$.
b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général ${u_n}^\alpha$.

Exercice 1028  *Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x$ et $b_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, \mathrm{d}x$.

a) Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles convergentes ?
b) Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

Exercice 1029 *Mines 2016 et 2019* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^2}$ avec a que l'on précisera.
c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

Exercice 1030 *Centrale 2024*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$

a) Déterminer la limite de la suite (I_n), notée ℓ. Donner un équivalent de $I_n - \ell$.
b) Justifier l'existence de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et montrer que $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de I_n.

Exercice 1031 *Mines 2016 et 2023* Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,dt$.

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$.

a) Déterminer la limite de (u_n).
b) Déterminer le domaine de définition de f.
c) Déterminer la limite de f en 1^-.

Exercice 1032 *Mines 2016* Soit $f_n : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{nx(1-x)}{n^2x^2+(1-x)^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n$.

a) Déterminer la limite éventuelle de (I_n).
b) Nature de la série de terme général I_n ? de la série de terme général ${I_n}^2$?

Exercice 1033 *Ens 2024*

Encadrer et donner un équivalent en $+\infty$ de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$.

Exercice 1034 *Mines 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, soient $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ et $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0;n+1[}(x)$.

a) Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Calculer la limite simple des fonctions f_n.
c) Calculer la limite ℓ de u_n
d) Montrer que $\big(n(\ell-u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.
Ind. On pourra montrer que $\forall x \in [\,0\,;1/2\,]$, $\ln(1-x) \geqslant -x-x^2$.

Exercice 1035 *Centrale 2005*

1. Convergence et somme de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{-1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\tan(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$.

2. En déduire la convergence et la limite de la suite de terme général $V_n = \dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Les deux séries envisagées dans ces deux questions convergent-elles absolument ?

Exercice 1036 *Ens 2015*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série de terme général a_n est convergente. On pose $\varphi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.

a) Montrer que $\varphi(x)$ existe pour $x \geqslant 1$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général $\varphi(k)$, $k \geqslant 0$, converge.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)$ converge.

Exercice 1037 *Ens 2015*

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général a_n est absolument convergente.

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

b) Donner une condition suffisante pour que la fonction F soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 1038 *Ens 2015*

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe indexée par $\mathbb{Z}$. On suppose que les séries de termes généraux $|c_n|^2$ et $n|c_n|$ convergent, que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = 1$ et que : $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\overline{c_{n+k}} = 0$.

On veut montrer que $S = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2$ est un entier.

a) Montrer que la série de terme général $n|c_n|^2$ converge.

b) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Montrer que g est à valeurs dans le cercle unité et que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Montrer que $S = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{g'}{g}$.

d) Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = e^{if}$. Conclure.

Exercice 1039 *Ens 2015 et 2016*

a) Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in \mathbb{R}$ et $(a_k(n))_{n\geqslant 0}$ une suite réelle de limite a_k. On suppose que, pour tout n, le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + a_k(n))$ converge. On suppose de plus qu'il existe une suite $(m_k)_{k\geqslant 1}$ de réels positifs telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_k(n)| \leqslant m_k$ et que la série des m_k converge. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + a_k)$ converge.

Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1+a_k(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=1}^{+\infty}(1+a_k)$.

b) On pose $n=2m+1$. Montrer que $\displaystyle\sin(nx)=n\sin x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/n)}\right)$.

c) Montrer que $\displaystyle\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$.

Exercice 1040 *Centrale 2023*

Soit f la fonction définie par $\displaystyle f(x)=\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}(1-e^{k(1+x^2)})$.

Déterminer le domaine de définition de f, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine et dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes du domaine.

Exercice 1041 *X 2023*

a) On fixe $x \geqslant 0$. Déterminer un équivalent simple de $u_n=(x+1)\cdots(x+n)$ de la forme $C(x)v_n(x)$ où $C(x)$ est une constante qu'on ne cherchera pas à calculer et $v_n(x)$ est explicite.

b) Calculer $C(k)$ pour $k\in\mathbb{N}$, et la limite de $C(x)$ quand $x\to+\infty$.

Exercice 1042 *X 2022*

On pose $\displaystyle f(x)=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-x^{2^n}\right)$.

a) Montrer que f est continue, puis de classe $\mathcal{C}^1$, puis de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

b) On pose $f(1)=0$. Montrer que f est continue en 1.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 1.

d) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^k$ $(k\geq 2)$ en 1 ?

Exercice 1043 *X 2023*

Soit (a_n) une suite de réels positifs tels que $\sum a_n$ diverge.

a) Montrer que, pour tout intervalle de longueur non nulle I, il existe $x\in I$ tel que la série $\sum a_n\cos(nx)$ ne converge pas absolument. On pourra d'abord montrer que, pour tout $a<b$ et tout N il existe $M\in\mathbb{N}$ et $x\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{M}a_n\cos^2(nx)>N$.

b) Existe-t-il des exemples où la série converge sur un intervalle non trivial ?

Exercice 1044 *Mines 2019*

Soit (u_n) une suite positive de limite nulle. On note $D=\left\{\alpha\in\mathbb{R},\ \sum u_n^\alpha \text{ converge}\right\}$.

a) Montrer que D est soit vide, soit de la forme $[s,+\infty[$, soit de la forme $]s,+\infty[$.

b) On note $\displaystyle f:\alpha\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^\alpha$. L'application f est-elle continue sur D ? Est-elle monotone ?
