



Suite d'exercices à résoudre simplement ou uniformément¹.

千里之行始於足下千里之行始於足下

LES BASIQUES

Exercice 928  X 2012 Déterminer la limite de $I_n = n \int_0^1 e^{-nx/2} (1-x)^n dx$.

Exercice 929  Mines 2024

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \sqrt[n]{1+t^n}}$.

Montrer que chaque intégrale I_n est convergente puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 930  Centrale 2024

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(nx)} = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(x)}$ et calculer leur valeur.

b) Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(x)}{1 + \cos^2(nx)} dx$.

Exercice 931  Mines 2024

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. Calculer I_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

d) Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n .

Exercice 932  Mines 2022 et 2024

a) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $J_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$ est bien définie, et en déduire que $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}} dx$ est bien définie.

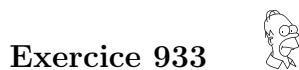
b) Montrer que $(J_n)_n$ converge vers 0 à l'aide du théorème de convergence dominée.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer J_n à l'aide de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

En déduire une nouvelle démonstration de la convergence de $(J_n)_n$ vers 0.

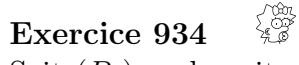
d) Montrer que $0 \leq J_n - I_n \leq \frac{\Gamma(a+b+1)}{n^{a+b+1}}$ pour tout $n \geq 1$; en déduire que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

1. On pourra intervertir l'ordre de résolution des exercices à l'aide d'un théorème d'interversion.

**Exercice 933***X 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{1}_{[1, \frac{\pi\sqrt{n}}{2}]}(x)$.

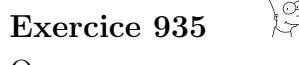
- a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
 b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.
-

**Exercice 934***Mines 2023*

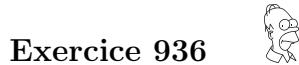
Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions polynomiales définie par $\forall x \in [0, 1]$, $P_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$.

- a) Déterminer le degré de P_n
 b) étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (P_n) .
-

LES INCONTOURNABLES

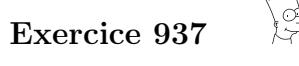
**Exercice 935***Mines 2019*

On pose, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx + x\sqrt{x}}$. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n$.

**Exercice 936***X 2016*

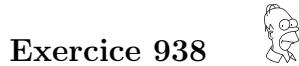
a) Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $x_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$.

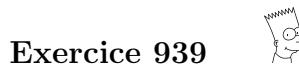
**Exercice 937***X 2009, 2012 et 2013 et 2018, Mines 2009, 2012, 2016 et 2018*

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- a) Déterminer la limite de (I_n) .
 b) On suppose $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de I_n .
 c) On suppose que $f(1) = 0$ et que f est de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que la série de terme général I_n converge et calculer sa somme.
-

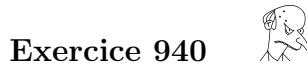
**Exercice 938***Mines 2012, 2016, 2017, 2018, 2019 et 2022*

Justifier la définition de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} \cos x}{\sqrt{x}} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de I_n .

**Exercice 939***Mines 2018*

Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de Γ .
 b) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Calculer $T_n(x)$.
 c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

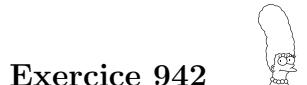
**Exercice 940***X 2009 et 2018 : Théorème de Dini*

- a) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui converge simplement vers 0. On suppose que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est décroissante. Montrer que la convergence est uniforme .
 b) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues et décroissantes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui converge simplement vers 0. Montrer que la convergence est uniforme .²

**Exercice 941***Mines 2016*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt$.

- a) Montrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
 b) Justifier l'existence de I_n . Montrer que $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
 c) Montrer que $\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

**Exercice 942***Mines 2017, X 2023*

Soient E l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} et $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$.

- a) Montrer que (f_1, \dots, f_n) est liée \iff pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}) = 0$.
 b) Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de F qui converge simplement vers une fonction f . Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

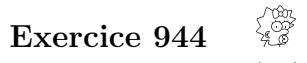
**Exercice 943**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n \chi_{[0, \sqrt{n}]}(x)$, $g_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^{1/2} f_n(x)$,

$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$.

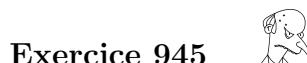
a) Montrer que $I_n J_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{4}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

LES AUTRES**Exercice 944***X 2012*

Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'_n(x)| \leq 1$. Montrer que f est continue.

**Exercice 945***Ens 2014*

Soit sgn la fonction de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} qui à x associe 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 0$ et : $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $f(x) > 0$.

2. Il s'agit en fait des théorèmes de Dini (Ulisse Dini 1845 / 1918 Pise : mathématicien italien) exposés dans son livre : *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*.

Montrer l'équivalence entre : i) $\int_{-1}^1 \frac{1}{f} = +\infty$; et

ii) il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que (u_n) converge simplement vers la fonction sgn et telle que $\int_{-1}^1 f(t) u'_n(t)^2 dt \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 946  *X 2023*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E est stable par translation, c'est-à-dire que $\forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R}, (x \mapsto f(x+a)) \in E$. Montrer que $\forall f \in E, f' \in E$.

Exercice 947  *X 2019* Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} . On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f . On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}$. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur I .

Exercice 948  *Ens 2016*

- Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $[0, 1]$ vers f . La fonction f est-elle forcément polynomiale ?
 - Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers f . La fonction f est-elle forcément polynomiale ?
-

Exercice 949  *Ens 2024*

Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - e^x| = 0$.

Montrer que $\deg(P_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 950  *Mines 2022*

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_d[X]$ et $\|\cdot\|$ une norme sur E . Pour $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E et $P \in E$, on écrit $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P$ lorsque $\|P_n - P\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

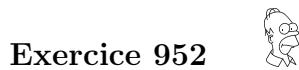
- Montrer que si $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P$, alors la suite de fonctions $(P_n)_{n \geq 0}$ tend simplement vers P sur \mathbb{R} .
- Caractériser les parties I de \mathbb{R} pour lesquelles l'implication suivante est vraie pour toute suite $(P_n)_{n \geq 0}$ dans E et tout $P \in E$:

$$(P_n) \text{ tend simplement vers } P \text{ sur } I \implies P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P.$$

- Caractériser les parties I de \mathbb{R} pour lesquelles l'équivalence suivante est vraie pour toute suite $(P_n)_{n \geq 0}$ dans E et tout $P \in E$:

$$(P_n) \text{ tend uniformément vers } P \text{ sur } I \iff P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P.$$

Exercice 951  *X 2016* Soit $f_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(f_n(x))$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) .

**Exercice 952***Centrale 2016 et Mines 2019*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que, pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $|f(x)| < |x|$. On pose $f_1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = f_n \circ f$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 953*Ens 2024*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$ et $f'_{n+1}(x) = e^x \sqrt{f_n(x)}$. Justifier l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et déterminer sa valeur.

Exercice 954*Centrale 2024*

Soient $u_0 \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \in [0, 1] \mapsto 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (u_n) .

Exercice 955*Centrale 2010*

Soit $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(x) \cos(t)} dt$.

Déterminer le domaine de définition de F et exprimer $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 956*Centrale 2010 et 2015*

Soient, pour $n \geq 2$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + \dots + x^n}$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + \dots + x^n}$.

On rappelle que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[p]{x_1 \dots x_p} \leq \frac{x_1 + \dots + x_p}{p}$.

- Justifier la définition de u_n et v_n pour $n \geq 2$.
 - Déterminer la nature de la série de terme général v_n .
 - Déterminer la limite éventuelle de (u_n) .
-

Exercice 957*Mines 2007 et 2008*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive, intégrable et bornée.

- Justifier l'existence de $K = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.
 - Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} f(t)^n dt$. Justifier l'existence de u_n .
 - Déterminer la nature de la série de terme général u_n en fonction de K .
-

Exercice 958*Centrale 2008*

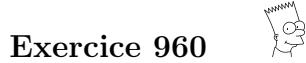
Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^n}$, après avoir déterminé les valeurs de n pour lesquelles l'intégrale converge.

Exercice 959*Centrale 2022*

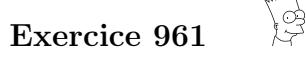
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{\sqrt{n} n^n}{n!} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{\sqrt{n}t} dt.$$

- Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

**Exercice 960***Mines 2022*

Donner un équivalent de $I_n := \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t+t^2)^n} dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

**Exercice 961***Mines 2022*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/n^2}}{\frac{1}{n^2} + f(x)} dx$.

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $\frac{1}{f}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

**Exercice 962***Centrale 2019*

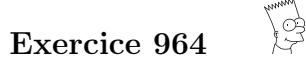
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt$.

- a) Justifier la définition de u_n .
- b) Donner un équivalent de u_n .
- c) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

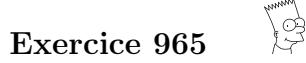
**Exercice 963***X 2019*

On pose, pour $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-nx} - e^{-2nx}}{\sin x} dx$.

- a) Montrer que I_n est bien définie.
- b) Déterminer la limite de I_n .

**Exercice 964***Mines 2022*

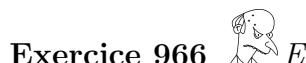
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique. Soient $a < b$ deux réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_a^b f(nx) dx$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

**Exercice 965***X 2020*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

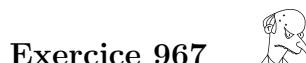
$$u_n = \int_0^{+\infty} \exp(-nt - \frac{t^2}{2}) dt$$

- a) Justifier la définition de u_n .
- b) Donner un développement asymptotique à la précision $o(1/n^3)$ de u_n .

**Exercice 966***Ens 1974*

a) Existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \cos(t^n) dt$.

b) Equivalents simples de I_n et J_n quand $n \rightarrow +\infty$?

**Exercice 967***Mines 2011 et 2015*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(n\sqrt{x})}{1+x^3+\dots+x^{3n}} dx$.

- a) Montrer que (u_n) possède une limite $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, que l'on déterminera.
- b) Nature de la série de terme général $(u_n - \ell)$?

**Exercice 968**

Mines 2007, 2010 et 2012

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\sin x) dx$. Limite et équivalent de (u_n) ?**Exercice 969**Calculer un équivalent de $\int_0^1 \frac{nx \sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha} dx$ **Exercice 970**X 2010 et 2018 Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^{+*})$, et $c > 0$.Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = n \int_a^b \ln \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^c \right) dx$. Limite, suivant la valeur de c , de I_n ?**Exercice 971**

X 2008

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x$.Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 f^2(x)} dx$. Déterminer la limite de I_n .**Exercice 972**

X et Mines 2009, Mines 2012

Soient $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n \int_0^1 f(t)^n dt$. Déterminer la limite de (I_n) dans chacun des cas suivants : (i) $\sup f < 1$; (ii) $\sup f > 1$; (iii) $\sup f = 1$ et $f' < 0$.**Exercice 973**

X 2008, Mines 2015

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, : $a_n = \int_1^{1+1/n} f(t^n) dt$.a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.b) Déterminer un équivalent de a_n quand $n \rightarrow +\infty$.**Exercice 974**

X 2007, Mines 2007 et 2012

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt$. Limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$, puis en donner un équivalent.**Exercice 975**

Mines 2024

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.a) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \geq 0$ tel que $A_n(x) = y$. On pose $f_n(y) = x$.b) Étudier la monotonie de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer que la suite converge simplement vers une fonction f .c) Montrer que $\forall x \geq 0$, $0 \leq f(x) < 1$.d) Montrer que $\forall x \geq 0$, $f(x) = 1 - e^{-x}$.**Exercice 976**

Ens et X 2023

On considère une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une application continue f .

- a) On suppose les f_n de classe C^1 et de dérivées uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n, \|f'_n\|_\infty \leq C$. Montrer que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0, 1]$.
- b) On suppose maintenant les f_n de classe C^k pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et de dérivées k -ièmes uniformément bornées. La convergence de la suite (f_n) est-elle toujours uniforme sur $[0, 1]$?
-

Exercice 977  *X 2023*

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on définit la fonction $T(f)$ par $T(f)(0) = f(0)$ et $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ pour $x \in]0, 1]$.

On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $T^{n+1}(f) = T(T^n(f))$.

- a) Montrer que T est bien définie comme fonction de E dans lui-même.
- b) Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $x \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $T^n f$ converge uniformément vers la fonction nulle quand $n \rightarrow +\infty$.
- c) Étudier le comportement de $(T^n(f))_{n \geq 0}$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout f continue.
-

Exercice 978  *X 2023*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et C une constante réelle positive. On suppose :

(i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n^{(3)}\|_\infty \leq C$, (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.

a) Montrer que $\lim \|f'_n\|_\infty = \lim \|f''_n\|_\infty = 0$.

b) Les résultats précédents restent-ils vrais si on ne fait plus l'hypothèse (i) ?

Exercice 979  *X 2010*

Soit $M > 0$. Construire une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que : i) $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n(x) \leq M$, ii) $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$, iii) la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est divergente pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 980  *Mines 2022, X 2023*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq M$.

a) Si $M = 0$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$.

En considérant la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$, montrer que (v_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction continue g .

c) Montrer que g est la seule application linéaire telle que la fonction $f - g$ soit bornée sur \mathbb{R} .

Exercice 981  *X 2022*

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- a) Montrer que la formule $g(x) = \inf_{y \in [-1, 1]} (f(y) + |x - y|)$ définit une fonction 1-lipschitzienne sur $[-1, 1]$.
- b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions lipschitziennes qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.
-

**Exercice 982**

X 2022

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^2 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

a) On suppose que $(f'_n - f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément et que $(f_n(0))_{n \geq 0}$ converge. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

b) On suppose que $(f''_n - f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément et que $(f_n(0))_{n \geq 0}$ et $(f_n(1))_{n \geq 0}$ convergent. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

**Exercice 983**

X 2022

Soit un entier $p > 0$; on donne p réels a_1, \dots, a_p tels que $a_1 < \dots < a_p$.

On donne une suite d'éléments $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})$ de \mathbb{R}^p et on considère la suite de fonctions donnée par :

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_{i,n} e^{a_i x}.$$

a) Montrer que, si (f_n) converge simplement vers f sur le segment réel $[a, b]$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

b) On prend cette fois-ci une infinité de $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On pose alors f_n comme précédemment en supposant, que pour tout n , l'ensemble des i tels que $\lambda_{i,n}$ n'est pas nul est fini. Qu'en est-il du résultat de la question précédente?

**Exercice 984**

X 2023

Posons $A = \mathbb{Q} \cap [0; 1]$. Existe-t-il une suite (f_n) de fonctions de A dans A , continues sur A et qui converge simplement sur A vers une fonction f qui n'est continue en aucun point de A ? La convergence peut-elle être uniforme?

**Exercice 985**

X 2024

a) Pour $p \in \mathbb{R}$, calculer $\sup \left\{ xp - \frac{x^2}{2} ; x \in \mathbb{Q} \right\}$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ contenant les fonctions constantes et tel que :

- pour toutes $f, g \in F$, la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est dans F ;
- pour toute suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de F qui tend simplement vers une fonction f , la fonction f appartient à F .

Montrer que, si $f, g \in F$, alors $fg \in F$.
