« Life is too short for long-term grudges . », Elon Musk

Les basiques

Exercice 1001  *Mines 2022*

a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\, e^{-nx}}{\ln(n)}\cdot$ b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1002  *X 2015* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est continue et décroissante.
c) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 1003  *Centrale 2023*

On donne la valeur $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

a) Prouver la convergence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

c) établir la convergence des intégrales u_n et v_n.
d) Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1004  *Ens 2023*

Pour $q \in \{1,2,3,4\}$, calculer $f_q(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{qn}}{(qn)!}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f_q(x)$.

Exercice 1005  *Centrale 2016* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
c) Étudier la convergence normale/uniforme de cette série de fonctions sur D.

Exercice 1006 *Mines 2018* On pose $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$.
a) Etudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, \infty[$ avec $a > 0$.
c) Y-a-t'il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 1007 *X 2019*

Soit (a_n) une suite décroissante tendant vers 0. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{x^{2n}} \mathrm{d}x$.

Exercice 1008 *Mines 2022 et 2023*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$.
a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.
c) Montrer que $u_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$.

Exercice 1009 *Mines 2018* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sin(\pi/2^n)$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. Exprimer $f'(x)$ pour $x \in D$.
c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ comme somme d'une série.

Les incontournables

Exercice 1010 *Centrale 2019 et Mines 2022* Soit a_n une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
On pose $u_k(x) = a_k x^k (1 - x)$.
a) Montrer que $\sum u_k$ converge simplement sur $[0, 1]$.
b) Montrer que $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $a_k \to 0$.
c) Montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_k}{k}$ converge.
d) En déduire une série de fonctions qui CVU et qui ne CVN pas sur $[0, 1]$.

Exercice 1011 *X 2007, Mines 2010 et 2014, Centrale 2010 et 2022*
Soient $f_0 \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [a, b]$: $f_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer la convergence de la série de fonction de terme général f_n.
2. Calculer $\displaystyle\sum_n f_n$.

Exercice 1012 On pose $S(x) = \sum_n \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ pour $x \geqslant 0$.

a) Montrer que S est bien définie. b) Etudier la continuité, puis la dérivabilité de S (en particulier en 0).

Exercice 1013 *Mines 2019*

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.

a) Montrer que f est définie sur $]-1,1]$, continue sur $]-1,1[$.

b) Soit $x \in]0,1[$. On pose $\varphi_x : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x^t}{1+x^t}$. Montrer que φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire un encadrement de $f(x)$ et la limite de f en 1^-.

d) La série de fonctions définissant f converge-t-elle uniformément sur $]-1,1]$?

Exercice 1014 *Mines 2017* Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 1015 *Centrale 2017* Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

b) Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 1016 *Mines 2018*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan}(n)$. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 1017 *Mines 2009, 2010, 2013, 2014, 2015 et 2023, X 2011*

Soient $a > 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{a}{n^2x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et un équivalent de f en 0.

Exercice 1018 *Centrale 2007, 2008, 2009, 2012 et 2023, X 2011, Mines 2012, 2014, 2015, 2019, 2022 et 2023*

On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n+xn^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de S. Etudier la continuité et la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to 0^+$.

Exercice 1019  *Mines 2009, 2016, 2018, 2019 et 2023* Soit $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$ quand $t \to 0^+$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
c) Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 1020  *Mines 2018 et 2019*

Soit, pour $n \in$, $u_n : x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Converge-t-elle normalement ?

Exercice 1021 ζ *Fonction ζ de Riemann* *Mines 2018*

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1. Montrer que ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.
2. Donner un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand $x \to 1^+$.
3. Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement vers une fonction U continue sur $]0, +\infty[$.
4. Donner un développement limité à deux termes de ζ au voisinage de 1.

Exercice 1022  *X 2016*

Soit $f : r \in [2, +\infty[\mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^r}$ · Montrer que f est bien définie et que $f(r) \underset{r\to+\infty}{=} 1 + O(2^{-r})$.

Exercice 1023  *Mines 2018*

Soient $\varphi : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\varphi\left(2^k x\right)}{4^k}$.

a) Soit $M > 0$. Montrer que S est définie et continue sur $[0, M]$.
b) Soit $x_0 = n2^{-p}$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que S n'est pas dérivable en x_0.
c) Montrer que S n'est dérivable en aucun point.

Exercice 1024  *Mines 2023*

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$.

Les autres

Exercice 1025 *Ens et X 2023*
Soit $\alpha > 0$. étudier la convergence simple, normale et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$.

Exercice 1026 *X 2018* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.
Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 1027 *X 2016*
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{\lfloor \ln(k) \rfloor}$. Étudier la convergence de (f_n).

Exercice 1028 *Centrale 2012*
Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : t \in [0,1] \mapsto t^n f(t)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série de terme général u_n converge normalement.

Exercice 1029 *Mines 2012* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$.
a) Domaine de définition de f ?
b) Relation entre $f(x)$ et $f(1/x)$ c) exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 1030 *Mines 2023*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \pi/2[$. On pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos(nt)}{(\cos t)^n}\,\mathrm{d}t$.
a) Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.
b) Montrer que $\dfrac{I_n(x)}{2^n} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k(2\cos x)^k}$.
c) En déduire que $\forall x \in [0, \pi/3],\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k(2\cos x)^k}$.

Exercice 1031 *Mines 2016, 2017, Centrale 2017*
Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$. Montrer que f est définie. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 1032 *Centrale 2018* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \left\lfloor \sqrt{\pi/2x} \right\rfloor \times \dfrac{2x}{\pi} - \displaystyle\sum_{k \geqslant \sqrt{\pi/x}} \frac{1}{k^2}$.

c) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1033  *Centrale 2019* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est périodique.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.
d) Tracer le graphe de f.

Exercice 1034  *Centrale 2023*

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, on pose $f(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n} t^n$.

a) Justifier que f est bien définie.
b) Calculer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 1035  *Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathrm{th}(x+n) - \mathrm{th}(n)$. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

a) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}^+$, continue et strictement croissante.
b) La fonction S admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 1036  *Mines 2009 et 2010* Soit $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la continuité de f sur D.
2. Étudier la limite en 1^-. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1037  *Mines 2009, 2010, 2012 et 2022* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.

Exercice 1038 *Centrale 2023*

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$.

a) Justifier l'existence de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et la continuité de S sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 1039  *Mines 2022 et 2023*

Soit $f : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$. a) Montrer qu'on définit ainsi une fonction f continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Montrer que f est 1-périodique.

c) Montrer que f vérifie $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$.

d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 1-périodique et vérifiant $(*)$. Montrer que g est la fonction nulle.

e) Montrer que $x \mapsto f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ est continue en 0.

f) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

Exercice 1040 *X 2023*

On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Montrer que g est 1-périodique.

c) établir une relation entre $g\left(\frac{x}{2}\right)$, $g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ et $g(x)$ dès que les termes font sens.

d) En déduire que $\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 1041  *Centrale 2009* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 1042  *Mines 2018, 2019 et 2023*

Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais qu'elle n'y converge pas normalement.

b) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ est une fonction continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Est-elle dérivable en 0 ?

e) Montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$.

Exercice 1043 Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ en utilisant $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1044  *Mines 2022*

a) Démontrer que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum \left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} - \dfrac{x^{n+1}}{2n+2}\right)$ converge simplement sur $[0,1]$.

La convergence est-elle  ?

Exercice 1045 *Mines 2023*

Pour $a>0$ et $x>0$, on pose $f_a(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^a}$.

a) étudier les convergences simple et uniforme de cette série sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b) Montrer que f_a est l'unique fonction $\varphi:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ telle que

$\forall x>0,\ \varphi(x)+\varphi(x+1)=\dfrac{1}{x^a}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

c) Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) étudier les variations de f_a sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Déterminer des équivalents de $f_a(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1046 *Mines 2008 et 2012, Centrale 2010 et X 2011* Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{x}{n})$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ f'(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt$.
3. Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1047 *X 2015, Mines 2015 et 2023* Soient $\zeta:s\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ et $\zeta_2:s\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

a) Déterminer le domaine de définition de ζ et celui de ζ_2. Montrer que ces fonctions sont continues.

b) Déterminer la valeur de $\zeta_2(1)$.

c) Si $s>1$, exprimer $\zeta_2(s)$ en fonction de $\zeta(s)$.

d) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x\to1^+$.

Exercice 1048 *Mines 2009*

Montrer que $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{ch}x}dx$ existe. Montrer que $I=2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 1049 *Mines 2023*

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\neq1$. On pose $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{z-e^{it}}$.

a) Calculer I en utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.

b) Calculer I en utilisant une série de fonctions.

Exercice 1050 *Mines 2011 et 2012*

a)Étudier la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^2(nx)}{\tan x}dx$. *Ind.* Considérer $v_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^2(nx)}{x}dx$.

b) Si $\alpha\in\mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général ${u_n}^\alpha$.

Exercice 1051 *Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ et $b_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles convergentes ?

b) Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

Exercice 1052 *Mines 2016 et 2023* Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n}dt$.

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$.

a) Déterminer la limite de (u_n).

b) Déterminer le domaine de définition de f.

c) Déterminer la limite de f en 1^-.

Exercice 1053 *Mines et Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

a) Déterminer la limite ℓ de la suite (I_n).

b) Donner un équivalent de $I_n - \ell$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}dy = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

d) Donner un développement asymptotique de I_n à trois termes.

Exercice 1054 *Mines 2018* a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

b) En déduire que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. c) Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 1055 *Mines 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, soient $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$ et $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0;n+1[}(x)$.

a) Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer la limite simple des fonctions f_n.

c) Calculer la limite ℓ de u_n

d) Montrer que $\big(n(\ell - u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.

Ind. On pourra montrer que $\forall x \in [\,0\,;1/2\,]$, $\ln(1-x) \geqslant -x - x^2$.

Exercice 1056 *Ens 2015*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série de terme général a_n est convergente. On

pose $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.
a) Montrer que $\varphi(x)$ existe pour $x \geqslant 1$.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général $\varphi(k)$, $k \geqslant 0$, converge.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)$ converge.

Exercice 1057 *X 2019* Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels.
a) Que peut-on dire du domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$?
b) On suppose que f est définie sur $]-\infty, s[$. Quelle est la régularité de f sur cet intervalle ?

Exercice 1058 *Ens 2015*
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général a_n est absolument convergente.
Soit $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.
a) Montrer que F est définie et continue sur $[1, +\infty[$.
b) Donner une condition suffisante pour que la fonction F soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 1059 *Ens 2015*
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe indexée par $\mathbb{Z}$. On suppose que les séries de termes généraux $|c_n|^2$ et $n|c_n|$ convergent, que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = 1$ et que : $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{c_{n+k}} = 0$.
On veut montrer que $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2$ est un entier.
a) Montrer que la série de terme général $n|c_n|^2$ converge.
b) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Montrer que g est à valeurs dans le cercle unité et que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Montrer que $S = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g'}{g}$.
d) Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = e^{if}$. Conclure.

Exercice 1060 *Centrale 2023*
Soit f la fonction définie par $f(x) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} (1 - e^{k(1+x^2)})$.
Déterminer le domaine de définition de f, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine et dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes du domaine.

Exercice 1061 *Mines 2023*
Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$.

Exercice 1062  *X 2023*

a) On fixe $x \geqslant 0$. Déterminer un équivalent simple de $u_n = (x+1)\cdots(x+n)$ de la forme $C(x)v_n(x)$ où $C(x)$ est une constante qu'on ne cherchera pas à calculer et $v_n(x)$ est explicite.

b) Calculer $C(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, et la limite de $C(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 1063  *X 2023*

Soit (a_n) une suite de réels positifs tels que $\sum a_n$ diverge.

a) Montrer que, pour tout intervalle de longueur non nulle I, il existe $x \in I$ tel que la série $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas absolument. On pourra d'abord montrer que, pour tout $a < b$ et tout N il existe $M \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{M} a_n \cos^2(nx) > N$.

b) Existe-t-il des exemples où la série converge sur un intervalle non trivial ?

Exercice 1064  *Mines 2019*

Soit (u_n) une suite positive de limite nulle. On note $D = \left\{\alpha \in \mathbb{R},\ \sum u_n^\alpha \text{ converge}\right\}$.

a) Montrer que D est soit vide, soit de la forme $[s, +\infty[$, soit de la forme $]s, +\infty[$.

b) On note $f : \alpha \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^\alpha$. L'application f est-elle continue sur D ? Est-elle monotone ?

Exercice 1065  *Centrale 2019*

a) Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum |a_n| < +\infty$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

b) Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum a_n$ converge. L'égalité précédente reste-t-elle vraie ?
