



Suite d'exercices à résoudre simplement ou uniformément¹.

千里之行始於足下 千里之行始於足下

LES BASIQUES

Exercice 938 Mines 2019

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) .

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt$.

Exercice 939  Centrale 2018 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$. On suppose que $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

Exercice 940 Mines 2022

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée telle que $f(0) \neq 0$.

a) Montrer que $a_n := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 941 Mines 2022

a) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $J_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$ est bien définie, et en déduire que

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}} dx$ est bien définie.

b) Montrer que $(J_n)_n$ converge vers 0 à l'aide du théorème de convergence dominée.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer J_n à l'aide de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

En déduire une nouvelle démonstration de la convergence de $(J_n)_n$ vers 0.

d) Montrer que $0 \leq J_n - I_n \leq \frac{\Gamma(a+b+1)}{n^{a+b+1}}$ pour tout $n \geq 1$; en déduire que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

Exercice 942  Mines 2009 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-nx^2} dx$.

Justifier l'existence de u_n . Étudier son comportement quand $n \rightarrow +\infty$.

1. On pourra intervertir l'ordre de résolution des exercices à l'aide d'un théorème d'interversion.

Exercice 943 Mines 2008

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{-\infty}^0 \frac{n^3 t^2 e^{-t^2 n^2}}{1+t^2} dt$. Justifier l'existence de I_n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 944 X 2023

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{1}_{\left[1, \frac{\pi\sqrt{n}}{2}\right]}(x)$.

- a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.
-

Exercice 945 Mines 2023

Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions polynomiales définie par $\forall x \in [0, 1], P_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$.

- a) Déterminer le degré de P_n
b) étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (P_n) .
-

LES INCONTOURNABLES

Exercice 946 Mines 2019

On pose, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx + x\sqrt{x}}$. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n$.

Exercice 947 X 2016

- a) Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.
b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $x_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$.
-

Exercice 948 X 2009, 2012 et 2013 et 2018, Mines 2009, 2012, 2016 et 2018

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- a) Déterminer la limite de (I_n) .
b) On suppose $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de I_n .
c) On suppose que $f(1) = 0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la série de terme général I_n converge et calculer sa somme.
-

Exercice 949 Mines 2012, 2016, 2017, 2018 et 2019

Justifier la définition de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} \cos x}{\sqrt{x}} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de I_n .

Exercice 950

X 2009 et 2018 : Théorème de Dini

- a) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers 0. On suppose que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est décroissante. Montrer que la convergence est uniforme.
- b) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues et décroissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers 0. Montrer que la convergence est uniforme.²

Exercice 951

Mines 2016

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt$.

- a) Montrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
- b) Justifier l'existence de I_n . Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
- c) Montrer que $\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

Exercice 952

Mines 2017, X 2023

Soient E l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ et $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$.

- a) Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée $\iff$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, $\det \left((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \right) = 0$.
- b) Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de F qui converge simplement vers une fonction f . Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

LES AUTRES

Exercice 953

Ens 2012

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f_0 : x \mapsto \operatorname{sh} x$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = -2 \int_0^x t f_n(t) dt$.

- a) Montrer que les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Expliciter f_1 .
- b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n} \operatorname{sh} x}{n!}$.
- c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $f_n(x) = Q_n(x) \operatorname{sh} x - P_n(x) \operatorname{ch} x$.
- d) Montrer que (P_n/Q_n) converge simplement vers la fonction th .

Exercice 954

Ens 2014

Soit sgn la fonction de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 0$ et : $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $f(x) > 0$.

Montrer l'équivalence entre : i) $\int_{-1}^1 \frac{1}{f} = +\infty$; et

ii) il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que (u_n) converge simplement vers la fonction sgn et telle que $\int_{-1}^1 f(t) u_n'(t)^2 dt \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

² Il s'agit en fait des théorèmes de Dini (Ulisse Dini 1845 / 1918 Pise : mathématicien italien) exposés dans son livre : *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*.

Exercice 955*X 2023*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E est stable par translation, c'est-à-dire que $\forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R}, (x \mapsto f(x+a)) \in E$. Montrer que $\forall f \in E, f' \in E$.

Exercice 956*X 2019*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f . On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}$. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur I .

Exercice 957*Ens 2016*

- a) Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $[0, 1]$ vers f . La fonction f est-elle forcément polynomiale ?
- b) Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f . La fonction f est-elle forcément polynomiale ?
-

Exercice 958*Mines 2022*

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_d[X]$ et $\| \cdot \|$ une norme sur E . Pour $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E et $P \in E$, on écrit $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P$ lorsque $\|P_n - P\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

- a) Montrer que si $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P$, alors la suite de fonctions $(P_n)_{n \geq 0}$ tend simplement vers P sur $\mathbb{R}$.
- b) Caractériser les parties I de $\mathbb{R}$ pour lesquelles l'implication suivante est vraie pour toute suite $(P_n)_{n \geq 0}$ dans E et tout $P \in E$:

$$(P_n) \text{ tend simplement vers } P \text{ sur } I \implies P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P.$$

- c) Caractériser les parties I de $\mathbb{R}$ pour lesquelles l'équivalence suivante est vraie pour toute suite $(P_n)_{n \geq 0}$ dans E et tout $P \in E$:

$$(P_n) \text{ tend uniformément vers } P \text{ sur } I \iff P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} P.$$

Exercice 959*X 2016*

Soit $f_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(f_n(x))$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) .

Exercice 960*Centrale 2016 et Mines 2019*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que, pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $|f(x)| < |x|$. On pose $f_1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = f_n \circ f$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 961*Centrale 2010*

Soit $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(x) \cos(t)} dt$.

Déterminer le domaine de définition de F et exprimer $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 962

Calculer $\int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 963

X 2012

Limite et équivalent de $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$.

Exercice 964

Centrale 2010 et 2015

Soient, pour $n \geq 2$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$.On rappelle que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[p]{x_1 \dots x_p} \leq \frac{x_1 + \dots + x_p}{p}$.

- Justifier la définition de u_n et v_n pour $n \geq 2$.
 - Déterminer la nature de la série de terme général v_n .
 - Déterminer la limite éventuelle de (u_n) .
-

Exercice 965X 2012, Mines 2016 : Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

- Déterminer la limite de (u_n) .
 - Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0, 1[\mapsto \frac{1}{u_n} \int_0^x (1-t^2)^n dt$. Étudier la convergence de (f_n) .
-

Exercice 966

Mines 2007 et 2008

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive, intégrable et bornée.

- Justifier l'existence de $K = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.
 - Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} f(t)^n dt$. Justifier l'existence de u_n .
 - Déterminer la nature de la série de terme général u_n en fonction de K .
-

Exercice 967

Mines 2013 et 2016

Soit, pour $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$. Justifier l'existence. Déterminer la limite de (I_n) .

Exercice 968

Centrale 2008

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de

 $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$, après avoir déterminé les valeurs de n pour lesquelles l'intégrale converge.

Exercice 969

Centrale 2022

- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{\sqrt{n} n^n}{n!} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{\sqrt{n}t} dt.$$

- Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.
-

Exercice 970

Centrale 2022

On admet : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.Trouver un équivalent de $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$. Ind. Faire le changement de variable $x = \sqrt{n} t$.

Exercice 971*Mines 2022*

Donner un équivalent de $I_n := \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t+t^2)^n} dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 972*Mines 2022*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/n^2}}{\frac{1}{n^2} + f(x)} dx$.

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $\frac{1}{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 973*Centrale 2019*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt$.

a) Justifier la définition de u_n . b) Donner un équivalent de u_n .

c) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 974*Centrale 2019*

Soit $n \geq 3$ et $f_n : x \mapsto x \exp(ix^n)$.

a) Prouver l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

b) Déterminer un équivalent de I_n .

Exercice 975*X 2019*

On pose, pour $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-nx} - e^{-2nx}}{\sin x} dx$.

a) Montrer que I_n est bien définie. b) Déterminer la limite de I_n .

Exercice 976*Mines 2022*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique. Soient $a < b$ deux réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_a^b f(nx) dx$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 977*X 2020* On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{+\infty} \exp\left(-nt - \frac{t^2}{2}\right) dt$$

a) Justifier la définition de u_n .

b) Donner un développement asymptotique à la précision $o(1/n^3)$ de u_n .

Exercice 978*Mines 2018*

Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a) Déterminer le domaine de définition de Γ .

b) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Calculer $T_n(x)$.

c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

Exercice 979  *Ens 1974* a) Existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \cos(t^n) dt$.
b) Equivalents simples de I_n et J_n quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 980  *Mines 2011 et 2015* Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(n\sqrt{x})}{1+x^3+\dots+x^{3n}} dx$.
a) Montrer que (u_n) possède une limite $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, que l'on déterminera.
b) Nature de la série de terme général $(u_n - \ell)$?

Exercice 981  *Mines 2007, 2010 et 2012*
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\sin x) dx$. Limite et équivalent de (u_n) ?

Exercice 982  Calculer un équivalent de $\int_0^1 \frac{nx \sin x}{1+n^\alpha x^\alpha} dx$

Exercice 983  *X 2010 et 2018* Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^{+*})$, et $c > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = n \int_a^b \ln \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^c \right) dx$. Limite, suivant la valeur de c , de I_n ?

Exercice 984  *X 2018* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$.
a) Déterminer la limite ℓ de (I_n) .
b) Déterminer un équivalent de $I_n - \ell$.

Exercice 985 
Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n \chi_{[0, \sqrt{n}]}(x)$, $g_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^{1/2} f_n(x)$,
 $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$.
a) Montrer que $I_n J_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{4}$.
b) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 986  *X 2008*
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x$.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2 f^2(x)} dx$. Déterminer la limite de I_n .

Exercice 987  *Ens 2009* Soient $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n \varphi(t) dt$. Déterminer la limite de (I_n) puis un développement asymptotique de I_n à la précision $o(1/n^2)$.

Exercice 988  *X et Mines 2009, Mines 2012* Soient $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n \int_0^1 f(t)^n dt$. Déterminer la limite de (I_n) dans chacun des cas suivants : (i) $\sup f < 1$; (ii) $\sup f > 1$; (iii) $\sup f = 1$ et $f' < 0$.

Exercice 989  *Mines 2016* Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ avec $0 < a < 1 < b$.

- a) Trouver la limite de la suite de terme général $I_n = \int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n} dx$.
 b) On suppose que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de $J_n = \int_a^1 \frac{f(x)x^n}{1+x^n} dx$.
-

Exercice 990  *X 2008, Mines 2015* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_1^{1+1/n} f(t^n) dt$.

- a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
 b) Déterminer un équivalent de a_n quand $n \rightarrow +\infty$.
-

Exercice 991  *X 2007, Mines 2007 et 2012*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$. Limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$, puis en donner un équivalent.

Exercice 992  *Ens et X 2023*

On considère une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une application continue f .

- a) On suppose les f_n de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivées uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n$, $\|f'_n\|_\infty \leq C$. Montrer que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0, 1]$.
 b) On suppose maintenant les f_n de classe $\mathcal{C}^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et de dérivées k -ièmes uniformément bornées. La convergence de la suite (f_n) est-elle toujours uniforme sur $[0, 1]$?
-

Exercice 993  *X 2023*

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on définit la fonction $T(f)$ par $T(f)(0) = f(0)$ et $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x \in]0, 1]$.

On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $T^{n+1}(f) = T(T^n(f))$.

- a) Montrer que T est bien définie comme fonction de E dans lui-même.
 b) Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $x \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $T^n f$ converge uniformément vers la fonction nulle quand $n \rightarrow +\infty$.
 c) Étudier le comportement de $(T^n(f))_{n \geq 0}$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout f continue.
-

Exercice 994

X 2023

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et C une constante réelle positive. On suppose :

(i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n^{(3)}\|_{\infty} \leq C$, (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$.

a) Montrer que $\lim \|f'_n\|_{\infty} = \lim \|f''_n\|_{\infty} = 0$.

b) Les résultats précédents restent-ils vrais si on ne fait plus l'hypothèse (i) ?

Exercice 995

X 2010

Soit $M > 0$. Construire une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que : i) $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n(x) \leq M$, ii) $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$, iii) la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est divergente pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 996

Mines 2022, X 2023

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$.

a) Si $M = 0$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$.

En considérant la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$, montrer que (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue g .

c) Montrer que g est la seule application linéaire telle que la fonction $f - g$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 997

X 2022

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que la formule $g(x) = \inf_{y \in [-1, 1]} (f(y) + |x - y|)$ définit une fonction 1-lipschitzienne sur $[-1, 1]$.

b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions lipschitziennes qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.

Exercice 998

X 2022

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose que $(f'_n - f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément et que $(f_n(0))_{n \geq 0}$ converge. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

b) On suppose que $(f''_n - f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément et que $(f_n(0))_{n \geq 0}$ et $(f_n(1))_{n \geq 0}$ convergent. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

Exercice 999

X 2022

Soit un entier $p > 0$; on donne p réels $a_1, \dots, a_p$ tels que $a_1 < \dots < a_p$.

On donne une suite d'éléments $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})$ de $\mathbb{R}^p$ et on considère la suite de fonctions donnée par :

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_{i,n} e^{a_i x}.$$

a) Montrer que, si (f_n) converge simplement vers f sur le segment réel $[a, b]$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

b) On prend cette fois-ci une infinité de $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On pose alors f_n comme précédemment en supposant,

que pour tout n , l'ensemble des i tels que $\lambda_{i,n}$ n'est pas nul est fini. Qu'en est-il du résultat de la question précédente ?

1000
annuaire



X 2023

Posons $A = \mathbb{Q} \cap [0; 1]$. Existe-t-il une suite (f_n) de fonctions de A dans A , continues sur A et qui converge simplement sur A vers une fonction f qui n'est continue en aucun point de A ? La convergence peut-elle être uniforme ?
