Feuille d'exercices d'intégration par parties : partie entre crochets

« Vivre aux crochets de l'intelligence de ses subordonnés, ma foi c'est peut-être comme ça qu'on est un chef aujourd'hui. », *La Taupe*, John Le Carré.

Exercice 891 *Centrale 2023*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.
a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $[0;1]$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_0^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

c) On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ est continue et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.
Soit $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\int_{v_n}^{v_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.
d) étudier la nature de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 892 *Ens 2019* Soit $\alpha > 0$.
a) Pour $x > 2$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^\alpha}$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{(\ln x)^\alpha}$.
b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + (\ln u_n)^\alpha$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 893 *X 2011* Soit $q \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $q(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$.
Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_1^x \frac{q(t)}{t}dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 894 *Mines 2011 et 2022*
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. Justifier la définition de I_n. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

Exercice 895 *Centrale 2018 et 2021*
Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$. a) Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.
b) Établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$. c) Déterminer la limite de $(I_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$.
d) Montrer l'existence de $k(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Exercice 896 *Mines 2011* Soient $\alpha > 1$ et a l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x^\alpha = \sin x$.
Étudier la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^\alpha - \sin x}}dx$.

Exercice 897 *Centrale 2016* Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x+\cos(x)} - \sqrt{x}\right) dx$.

Exercice 898 *Mines 2012* Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$?

Exercice 899 *X 2021*
a) Montrer que $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \cos\big(n(at^2 + bt^3)\big)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 900 *Mines 2012* a) Soit $a > 0$. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t} dt$?

b) Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cos(a_i t)}{t} dt$.
À quelle condition l'intégrale I est-elle définie ? Calculer I lorsque cette condition est réalisée.

Exercice 901 *X 2022*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. Prouver l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 902 *Mines 2019*
Justifier l'existence et calculer, pour $\lambda > 0$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} |\sin t| \mathrm{d}t$.

Exercice 903 *Mines 2022*
On fixe un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Pour $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, on note L^γ l'ensemble des fonctions continues f de I dans $\mathbb{R}$ telles que $|f|^\gamma$ soit intégrable sur I.
a) Montrer que L^γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
b) Soit $\alpha < \gamma < \beta$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $L^\alpha \cap L^\beta \subset L^\gamma$.

Exercice 904 *Mines 2019*
a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t$. b) Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 905 *Centrale 1995 et X 2011* Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt^2)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 906 *Ens 2019* Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\varphi(0) = 0$.
a) Montrer que φ est continue.
b) On note E_φ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\varphi \circ |f|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que E_φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(2x) \leqslant C\varphi(x)$.

Exercice 907 *Ens 2019* Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, e^t \mathrm{d}t$.

Exercice 908 Montrer l'existence puis que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) \mathrm{d}t = 1 - \gamma$.

Exercice 909 *X 2009, Centrale 2011* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle dérivable ?
2. Montrer que $x \mapsto e^{x^2} f(x)$ est bornée sur $[1, +\infty[$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0^+.
4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ? Si oui, la calculer.

Exercice 910 *X 2007*
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Montrer l'existence de $I(P) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln |P(e^{it})| \,\mathrm{d}t$.
b) Calculer $I(P)$ si P est de degré 1 puis dans le cas général.

Exercice 911 *Mines 2022*
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
a) Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $f' + af$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il en est de même de f.
b) Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ mais pas $f' + af$.

Exercice 912 *Mines 2023*
a) Montrer que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(t)Q(t)}{\operatorname{ch} t} \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.
b) On considère la gramschmidtée $(P_0, \ldots, P_n)$ de la base canonique $(1, \ldots, X^n)$. Calculer P_0 et montrer que, pour tout k, P_k est scindé à racines simples toutes positives.

Exercice 913 *X 2012, Mines 2015 et 2022*
a) Si $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
b) Déterminer $\inf \left\{ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|P(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}},\ P \in \mathbb{R}[X] \text{ unitaire de degré } n \right\}$.

Exercice 914 *X 2016*
Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale : $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.
a) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x)dx$.
b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi \ln(k)}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 915 *X 1974* Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

1. $\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(t+a) - f(t)| \,\mathrm{d}t = 0$.
2. $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t+a) - f(t)| \,\mathrm{d}t = 2 \int_{\mathbb{R}} |f|$.

Exercice 916 *X 2014* Calculer à l'aide d'une intégrale : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$.

Exercice 917 *X 2023*
Soit $\alpha \in]0,1[$.

a) Montrer l'existence de $c_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $c_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\alpha}}{\lambda + t} \mathrm{d}t = \lambda^{-\alpha}$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit : $A^{-\alpha} = c_\alpha \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}(A + tI_n)^{-1} \mathrm{d}t$.

Expliquer le sens de cette expression, montrer que l'intégrale converge et que $\left(A^{-1/2}\right)^2 = A^{-1}$.

c) Montrer que si $B - A$ est positive alors $A^{-1/2} - B^{-1/2}$ l'est aussi.

Exercice 918 *Centrale 2021*

a) Montrer l'existence et l'égalité des intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t$.

b) Pour $m \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin^{2m+1}(t)$ en fonction des $\sin(kt)$.

c) Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1}(t)}{t} \,\mathrm{d}t$. Exprimer I_m en fonction de I.

d) Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin^{2m} t$ en fonction des $\sin^2(kt)$.

e) En déduire une expression de $\frac{1}{I} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m} t}{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 919 *Mines 2018* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable.

a) On pose $g : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f$. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.

b) Montrer que g vérifie une équation différentielle.

c) Montrer que, pour $0 < a < b$, $\int_a^b g^2 = 2 \int_a^b fg + ag^2(a) - bg^2(b)$.

d) Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. e) Montrer que $\int_0^{+\infty} g^2 \leqslant 4 \int_0^{+\infty} f^2$.

Exercice 920 *Mines 2014 et 2022, Centrale 2016*

a) Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue, monotone et intégrable. Montrer : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 f$.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}$

Exercice 921 *Mines 2009 et 2023* Soit $f : x \mapsto |\sin x|^x$.

a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$. b) Étudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 922 *Mines 2009, 2010 et 2014*

Nature, suivant $\alpha \in (\mathbb{R}^{+*})$, de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin x|}$?