

- **Exercice 923**  Centrale 2009 et Mines 2010

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ tq : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t) t^n dt = 0$.

a) Montrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$. En déduire que $f = 0$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Justifier l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$.

c) On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = 0$. Montrer que $f = 0$.

- **Exercice 924** Mines 2011  Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4 |\sin x|^{3/2}} dx$.

- **Exercice 925**  Centrale 2010 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient de carrés intégrables.

1. Montrer que f' est de carré intégrable.

2. Si $f(0) = 0$, montrer : $\left(\int_0^{+\infty} (f')^2 \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right) \left(\int_0^{+\infty} (f'')^2 \right)$.

- **Exercice 926**  Ens 2012, Centrale 2018 Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que u et u' soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ et quand $x \rightarrow -\infty$.

b) Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $(u(x))^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2 \right)^{1/2}$.

- **Exercice 927**  X 2014 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} (f'(t)^2 + t^2 f(t)^2) dt$ existe.

Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt}$.

- **Exercice 928**  Mines 2016

Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telles que $f(0) = 0$ et f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour toute fonction f de E , $\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2} dt \leq K \int_0^{+\infty} f'^2(t) dt$.

- **Exercice 929**  Centrale 2009 Soient $u : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^5 + x$ et $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sin(x^5 + x)$.

a) Montrer que u réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. b) Déterminer un équivalent, lorsque $y \rightarrow +\infty$, de $u^{-1}(y)$.

c) La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$? d) L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ est-elle convergente ?

- Exercice 930

Mines 2017 Soient f une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$ et F sa primitive s'annulant en 0.

Comparer les natures de $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\operatorname{ch} t} dt$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{F(t) \operatorname{sh} t}{(\operatorname{ch} t)^2} dt$ et, le cas échéant, leurs valeurs.

- Exercice 931

X 2019

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $g : x \in [0, 1[\mapsto \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$.

- a) La fonction g est-elle continue sur $[0, 1[$? Peut-on la prolonger par continuité en 1?
 b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction g est-elle toujours de classe $\mathcal{C}^1$?
-

- Exercice 932

X 2019

Soit $b \in]0, \sqrt{\pi/2}[$. Trouver un équivalent de $\Phi : t \mapsto \int_0^b \sin(x) e^{it \sin(x^2)} dx$ quand $t \rightarrow +\infty$.

- Exercice 933

X 2020

Pour $g \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$\psi(g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x)}{x} dx$$

- a) Montrer que ψ est bien définie.
 b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall g \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R}), \quad |\psi(g)| \leq C \|g'\|_{\infty}^{[-1, 1]}$$

- c) Montrer qu'il n'existe pas de constante $D > 0$ telle que

$$\forall g \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R}), \quad |\psi(g)| \leq D \|g\|_{\infty}^{[-1, 1]}$$

- Exercice 934

Ens 2022

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $M_{\varepsilon} = \{t \in \mathbb{R} ; |P(t)| \leq \varepsilon\}$. Déterminer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_{\varepsilon}}(x) \cdot |P'(x)| dx.$$

- Exercice 935

X 2021

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3 + x}$.

- a) Justifier la définition de $f(x)$.
 b) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera tels que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{x^{\alpha}}$.
-

- Exercice 936

Mines 2021

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

- a) Montrer l'existence de $I(f) = \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) dt$.

b) Prouver que $I(f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\sin^2(\pi t)} dt$.

c) En considérant $S(f) = \int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t) \right)^2 dt$ montrer que

$$\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

d) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si

$$\forall t \in [0, 1], \quad \pi \cos(\pi t) f(t) = f'(t) \sin(\pi t).$$

e) Trouver toutes les fonctions qui vérifient le cas d'égalité.

- Exercice 937  Ens 2023

a) Quelles hypothèses sur $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ permettent d'assurer la convergence de l'intégrale suivante, pour tout $\lambda \in]0; 1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(x+z)}{|z|^{1+\lambda}} dz \quad ?$$

b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée à dérivée bornée. Soit $\lambda \in]0; 1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(x) = \varphi(x) + I_\lambda(x)$. Montrer que $\sup(\psi) \geq \sup(\varphi)$. Si $\psi \geq 0$, montrer que $\varphi \geq 0$.
