Feuille n° 11 d'exercices d'intégration (par parties) : 1ère partie

« Things grow stronger when you integrate », Daniel Wilson

	Vrai / Faux	V	F
1	Si $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.	☐	☐
2	Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$, alors f intégrable si et seulement si $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ bornée sur $\mathbb{R}_+$	☐	☐
3	Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ implique f intégrable sur $\mathbb{R}_+$.	☐	☐
4	Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$, f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ implique $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.	☐	☐
5	Soit f continue sur $[a, b[$, si $\lim\limits_{b-} f = +\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$.	☐	☐

Les basiques

Exercice 861 *Mines 2018 et 2023*
Existence et, le cas échéant, calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right] \mathrm{d}t$

Exercice 862 *Mines 2015* Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos x}} dx$.

Exercice 863 *X 2016 et 2018* 1) la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ est-elle intégrable entre 0 et 1 ?
2) Soit $X > 1$. On pose $g(X) = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^{X} \frac{dx}{\ln x} \right)$. Montrer que cette fonction est bien définie.

Exercice 864 *X 2013 et 2014*
Soit $f : t \mapsto |\ln t|^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, 1/2]$, $[1/2, 1[$, $]1, 2]$ et $[2, +\infty[$.

Exercice 865 *Centrale 2010* Étudier la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$.

Exercice 866 *Mines 2022 et 2023*
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_a^b \frac{t^n}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 867 *Mines 2015* Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t^4}}$.
a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et étudier ses variations.
c) Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 868 *Mines 2019 et 2021* On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\ln(\sin t)\mathrm{d}t$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la définition de I_n.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $nI_n - (n+1)I_{n+1}$. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

Exercice 869 *Mines 2022 et 2023*

Pour $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$.

a) Justifier l'existence de I_n et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Dans la suite, on fixe $n \geqslant 2$.

b) Montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \geqslant 0,\ \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{t+k}$$

c) Montrer que $I_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \ln(k)$.

d) Déterminer $a_1, \dots, a_n$ et en déduire I_n.

Exercice 870 *Mines 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$ de carré intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les incontournables

Exercice 871 *X 2022* Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 872 *Centrale 2010, Mines 2016 et 2023*

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{x}}dx$? Moralité ?

Exercice 873 *X 2009 et 2016* Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Qu'en est-il de f' ?
2. On suppose que f est monotone et qu'elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Qu'en est-il de f' ?

Exercice 874 *Mines 2016*

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum {u_n}^2$ converge.
b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f^2 est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 875 *Mines 2017*

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 876 *X 2017, Mines 2023* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue T-périodique.
Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\, dt$ converge.

Exercice 877 *X 2018* Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 878 Montrer que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable alors $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$.

Exercice 879 *X 2014 et 2021* Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue intégrable.
a) La fonction f est-elle nécessairement de limite nulle en $+\infty$?
b) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(x_n\, f(x_n))$ converge vers 0.

Exercice 880 *X 2011* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante et bornée. On suppose que f'' est bornée. Montrer que f' possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 881 *X 2012, Mines 2016 et 2021*
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. a) Montrer $x\, f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
b) Montrer que $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 882 *X 2013 et 2016, Mines 2017, Centrale 2022* *Intégrale de Frullani* [1]
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application continue admettant une limite L en ∞ et une limite ℓ en 0. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t}\, \mathrm{d}t$ existe et la calculer.
b) Application 1 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t}\, \mathrm{d}t$
c) Application 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \mathrm{d}t$

Exercice 883 *Centrale 2009* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
a) Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. b) Montrer que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 884 *X 2011, 2013, 2014 et 2020, Mines 2016 et 2022*
Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ intégrable sur $[1, +\infty[$.
a) Montrer que $\dfrac{f(t)^2}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$.
b) Montrer que $f(t) = o(\sqrt{t})$ lorsque $t \to +\infty$.

1. Giuliano Frullani (1795-1834) mathématicien italien. La formule obtenue a été démontrée il y a exactement 200 ans en 1823 par Cauchy.

Exercice 885 *Centrale 2005, 2015, 2016 et 2023, Mines 2010, 2014 et 2016*
Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. a) Montrer que F est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que : $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ en $+\infty$. c) Montrer que $F(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0.
d) Montrer qu'il existe un unique $r \in]0, \pi[$ tel que $F(r) = 0$.
e) Montrer que F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$. f) Déterminer une valeur approchée de r avec Python.

Exercice 886 *Mines 2009, 2010, 2014 et 2018*
a) Soit $a > -1$. Montrer en posant $x = \tan t$ que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.
b) Soit $\alpha > 0$. Étudier en fonction de α la convergence de $\displaystyle\sum \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$.
c) Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

Les autres

Exercice 887 *Mines 2013 et 2022* Nature, suivant α, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)\,\ln|1-x|}{x^\alpha(1+x)}dx$.

Exercice 888 *Centrale 2014* Existence et calcul de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

Exercice 889 *X 2021* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
a) On suppose que la série $\sum f(n)$ est convergente.
A-t-on nécessairement l'équivalent suivant $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \sim_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$?
b) Qu'en est-il si on rajoute l'hypothèse $f'(x) = o(f(x))$ lorsque $x \to +\infty$?

Exercice 890 *Mines 2023*
Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 tendant vers 0 en 0 et telle que h' est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n > 0$ tel que $h(u_n) = n\pi$.
b) Déterminer les limites des suites (u_n) et $(u_{n+1} - u_n)$.
c) étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(h(t))\,\mathrm{d}t$.