

« Things grow stronger when you integrate », Daniel Wilson

Vrai / Faux	V	F
1 Si $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge, alors f est intégrable sur \mathbb{R}_+ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 Soit f continue sur \mathbb{R}_+ , alors f intégrable si et seulement si $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ bornée sur \mathbb{R}_+	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 Soit f continue sur \mathbb{R}_+ , $\lim_{+\infty} f = 0$ implique f intégrable sur \mathbb{R}_+ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 Soit f continue sur \mathbb{R}_+ , f intégrable sur \mathbb{R}_+ implique $\lim_{+\infty} f = 0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5 Soit f continue sur $[a, b[$, si $\lim_{b-} f = +\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

LES BASIQUES

Exercice 861



Mines 2018 et 2023

Existence et, le cas échéant, calcul de $\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \right] dt$

Exercice 862



Mines 2015

Justifier l'existence de $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos x}} dx$.

Exercice 863



X 2016 et 2018

1) la fonction $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ est-elle intégrable entre 0 et 1 ?
 2) Soit $X > 1$. On pose $g(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^X \frac{dx}{\ln x} \right)$. Montrer que cette fonction est bien définie.

Exercice 864



X 2013 et 2014

Soit $f : t \mapsto |\ln t|^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, 1/2]$, $[1/2, 1[$, $]1, 2]$ et $[2, +\infty[$.

Exercice 865



Centrale 2010

Étudier la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$.

Exercice 866



Mines 2022 et 2023

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Existence et calcul de $I_n = \int_a^b \frac{t^n}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 867



Mines 2015

Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t^4}}$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et étudier ses variations.

c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ .

Exercice 868  *Mines 2019 et 2021* On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) \ln(\sin t) dt$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la définition de I_n .
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $nI_n - (n+1)I_{n+1}$. En déduire une expression de I_n en fonction de n .
-

Exercice 869  *Mines 2022 et 2023*
Pour $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$.

- a) Justifier l'existence de I_n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Dans la suite, on fixe $n \geq 2$.

- b) Montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \geq 0, \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{t+k}$$

- c) Montrer que $I_n = - \sum_{k=1}^n a_k \ln(k)$.

- d) Déterminer a_1, \dots, a_n et en déduire I_n .
-

Exercice 870  *Mines 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$ de carré intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer $\frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x f \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 871  *X 2022* Existence et calcul de $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 872  *Centrale 2010, Mines 2016 et 2023*

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{x}} dx$? Moralité?

Exercice 873  *X 2009 et 2016* Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Qu'en est-il de f' ?
 2. On suppose que f est monotone et qu'elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Qu'en est-il de f' ?
-

Exercice 874  *Mines 2016*

- a) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.
b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose f intégrable sur \mathbb{R}^+ . La fonction f^2 est-elle intégrable sur \mathbb{R}^+ ?
-

Exercice 875  *Mines 2017*

Soit $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} et calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.



Exercice 876 *X 2017, Mines 2023* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue T -périodique.

Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.



Exercice 877 *X 2018* Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

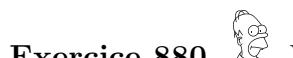


Exercice 878 *X 2018* Montrer que si f est uniformément continue sur \mathbb{R} et intégrable alors $\lim_{\pm\infty} f = 0$.

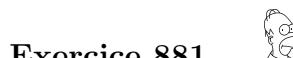


Exercice 879 *X 2014 et 2021* Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue intégrable.

- a) La fonction f est-elle nécessairement de limite nulle en $+\infty$?
b) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(x_n f(x_n))$ converge vers 0.



Exercice 880 *X 2011* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante et bornée. On suppose que f'' est bornée. Montrer que f' possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.



Exercice 881 *X 2012, Mines 2016 et 2021*

- Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur \mathbb{R}^+ . a) Montrer $x f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
b) Montrer que $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.



Exercice 882 *X 2013 et 2016, Mines 2017, Centrale 2022* *Intégrale de Frullani*¹

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue admettant une limite L en ∞ et une limite ℓ en 0. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

- a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt$ existe et la calculer.
b) Application 1 : Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t} dt$
c) Application 2 : Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$



Exercice 883 *Centrale 2009* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables sur \mathbb{R}^+ .

- a) Montrer que $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. b) Montrer que ff' est intégrable sur \mathbb{R}^+ .



Exercice 884 *X 2011, 2013, 2014 et 2020, Mines 2016 et 2022*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

- a) Montrer que $\frac{f(t)^2}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$.
b) Montrer que $f(t) = o(\sqrt{t})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

1. Giuliano Frullani (1795-1834) mathématicien italien. La formule obtenue a été démontrée il y a exactement 200 ans en 1823 par Cauchy.



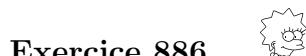
Exercice 885 *Centrale 2005, 2015, 2016 et 2023, Mines 2010, 2014 et 2016*

Soit $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$. a) Montrer que F est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que : $F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ en $+\infty$. c) Montrer que $F(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0.

d) Montrer qu'il existe un unique $r \in]0, \pi[$ tel que $F(r) = 0$.

e) Montrer que F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$. f) Déterminer une valeur approchée de r avec Python.



Exercice 886 *Mines 2009, 2010, 2014 et 2018*

a) Soit $a > -1$. Montrer en posant $x = \tan t$ que $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.

b) Soit $\alpha > 0$. Étudier en fonction de α la convergence de $\sum \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^{\alpha} \sin^2(t)}$.

c) Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^{\alpha} \sin^2(t)}$.

LES AUTRES



Exercice 887 *Mines 2013 et 2022* Nature, suivant α , de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x) \ln|1-x|}{x^{\alpha}(1+x)} dx$.



Exercice 888 *Centrale 2014*

Existence et calcul de : $\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

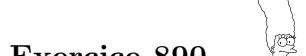


Exercice 889 *X 2021* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe \mathcal{C}^1 .

a) On suppose que la série $\sum f(n)$ est convergente.

A-t-on nécessairement l'équivalent suivant $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} f(t) dt$?

b) Qu'en est-il si on rajoute l'hypothèse $f'(x) = o(f(x))$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?



Exercice 890 *Mines 2023*

Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 tendant vers 0 en 0 et telle que h' est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n > 0$ tel que $h(u_n) = n\pi$.

b) Déterminer les limites des suites (u_n) et $(u_{n+1} - u_n)$.

c) étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(h(t)) dt$.