

Feuille d'exercices n° 10 : evn

« Não há normas. Todos os homens são excepção a uma regra que não existe. » (Fernando Pessoa)

SEASON'S GREETINGS



Exercice 779

convexité d'une boule

Soient E un e.v.n. , $a \in E$ et $r > 0$. On note $B = \mathcal{B}_f(a, r)$ et $B' = \mathcal{B}_o(a, r)$.

1. Montrer que B et B' sont convexes.
 2. Si la norme est euclidienne, montrer que si $(u, v) \in B^2$ avec $u \neq v$, alors $]u, v[\subset B'$. ($]u, v[= \{(1-t)u + tv \text{ avec } t \in]0, 1[\}$).
 3. En déduire que si la norme est euclidienne, toute partie A telle que $B' \subset A \subset B$ est convexe.
 4. Donner un contre-exemple avec une norme non euclidienne.
-

LES BASIQUES

Exercice 780



X 2014

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p \geq 1}$ converge vers B . Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 781



Ens 2012, Mines 2022

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme infinie : $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \max_{[0, 1]} |f|$.

Soit $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que : $\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$. Montrer que T est lipschitzienne.



Exercice 782

est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Soit E evn de dim finie, montrer que l'ensemble des projecteurs de E

Exercice 783



X 2018 et 2022

a) Déterminer les matrices A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

b) Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite de matrices $\left(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} A^i \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 784

X 2011, Mines 2022 et 2023

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Caractériser la limite de $\begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}^n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 785

Ens 2016, Mines 2023

Soit φ l'application qui à $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associe (λ_1, λ_2) où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A avec $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Montrer que l'application φ est continue.

**Exercice 786**X 2019 Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (x, y) \text{ libre}\}$.

Montrer que Ω est ouvert :

- en montrant que son complémentaire est fermé,
- en utilisant le produit vectoriel.

LES INCONTOURNABLES

**Exercice 787***convexité de la boule fermée unité et inégalité triangulaire*

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v. et soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés de séparation et d'homogénéité.

Soit $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$.

Montrer que N est une norme si et seulement si B est convexe.

Exercice 788

Soit E un e.v.n. de dimension finie et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ colinéaire à v_n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$.

Montrer que u et v sont colinéaires.

**Exercice 789**

Soit A une partie d'un evn E à la fois ouverte et fermée. On pose $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$.

- Démontrer que f est continue.
- En déduire que $A = \emptyset$ ou $A = E$.

Exercice 790

Ens 2019, X 2009, 2011, 2014, Mines 2014, 2017, Centrale 2010

Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par similitude ?

Exercice 791

Soit E un evn et $A \subset E$ une partie $\neq \emptyset$. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

Exercice 792

X 2014, Mines et Centrale 2022

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a) Montrer que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 b) Même question avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.



c) En déduire le

Exercice 793

Mines 2022

- a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré ≥ 1 .

Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

- b) En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors χ_A est scindé.
 c) Déterminer l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
-

Exercice 794

Ens 2016 et 2018

On munit $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq d} |a_{i,j}|$.

- a) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge. On note $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

(ii) Montrer que si A et B commutent alors $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

- b) Calculer $\exp(A)$ pour $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

On fixe A et B et on note $T_n = \exp(A/n) \exp(B/n)$ et $S_n = \exp((A+B)/n)$.

- c) Montrer que $\|S_n - T_n\|_\infty = O(1/n^2)$.
 d) Déterminer la limite de $((T_n)^n)$.
 e) L'application $A \mapsto \exp(A)$ est-elle injective ?
 f) Si A et B sont dans E , a-t-on toujours $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$?
 g) Déterminer $\{\exp(A), A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.
-

Exercice 795

Ens 2015, Mines 2022 et 2023

- a) Soient $p \in]1, +\infty[$, $t \in [0, 1]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $|tx + (1-t)y|^p \leq t|x|^p + (1-t)|y|^p$.

b) Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$. Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p \leq 1\}$. Montrer que B est convexe.

- c) Soient x et y dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme.
 d) Pour quelles valeurs de p cette norme est-elle euclidienne ?
-

Exercice 796

Mines 2018 et 2019

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E de dimension finie.

On note $A+B = \{a+b \text{ tq } a \in A, b \in B\}$. Montrer que

1. Si A ou B est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Si A et B sont fermés, alors $A+B$ n'est pas nécessairement fermé.

3. Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 797  *X 2008*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure possédant une unique valeur propre a .
Montrer l'équivalence entre : (i) $|a| < 1$, (ii) $M^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, (iii) $\sum M^p$ converge.

Exercice 798  *Mines 2023*

Soient $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(A^k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.
Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $|\lambda| < 1$.

Exercice 799  *X 2019, Mines 2019 et 2022 et 2023* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.
b) Montrer que M est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à sa classe de similitude.
-

Exercice 800 *Mines 2023*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que f est nilpotente si et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice A de f a tous ses coefficients de module inférieur à ε .

Exercice 801  *X 2007 et 2012, Centrale 2011, Mines 2022* Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On suppose que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$. Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros sur $[a, b]$.
 - On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$. Montrer que f est nulle.
-

LES AUTRES

Exercice 802  Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E . Montrer que $\text{Vect } \mathcal{O} = E$.

Exercice 803  *X 2011* Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$ et f, g, h dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose : $D(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $(\beta, \gamma) \in [a, c]^2$ tel que

$$D(a, b, c) = \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)H(\beta, \gamma) \text{ où } H(\beta, \gamma) = \det \begin{pmatrix} f(a) & f'(\beta) & f''(\gamma) \\ g(a) & g'(\beta) & g''(\gamma) \\ h(a) & h'(\beta) & h''(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Exercice 804  *Centrale 2010, X 2012, Mines 2016, Centrale 2018*

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt$.

Exercice 805*Ens 2023*

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \langle Ax, x \rangle dx$ où $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre x_0 et de rayon r .

Exercice 806*X 2023*

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que $A(0) = A(1) = I_n$ et $A(s+t) = A(s)A(t)$ pour tous s, t .

- a) Donner des exemples non triviaux de telles applications.
b) Montrer qu'il existe P inversible et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = P \times \text{diag}(e^{i2\pi\lambda_1 t}, \dots, e^{i2\pi\lambda_n t}) \times P^{-1}.$$

Exercice 807*Ens 2023*

On note $\|\cdot\|_1$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$.

- a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Montrer que $\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k y_k = 0$.
b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui préserve la norme $\|\cdot\|_1$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\|_1 = \|x\|_1$.

Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de f sur la base canonique est une matrice de permutation signée, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ vérifiant $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = \varepsilon_j \delta_{i, \sigma(j)}$.

Exercice 808*X 2016, Mines 2023*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que la suite de terme général $\frac{\langle A^{k+1}X, X \rangle}{\langle A^k X, X \rangle}$ a une limite quand $k \rightarrow +\infty$, et que cette limite est une valeur propre de A .

Exercice 809*Ens 2023*

Soient $\varepsilon \in \left] 0; \frac{1}{4} \right[$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} 1-2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \dots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

- a) Quel est le spectre de M ?
b) Déterminer la limite de la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 810*Centrale 2022*

a) Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui vérifie $M^2 = A$. Montrer qu'une telle matrice est unique. On la notera $\sqrt{A}$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ fixée. On considère la suite matricielle $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = I_n$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $U_{p+1} = \frac{1}{2}(U_p + AU_p^{-1})$. Montrer qu'une telle suite est bien définie et qu'elle converge vers $\sqrt{A}$.

Exercice 811*Ens 2011*On se place dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que : $\left(\frac{\text{tr } A}{n} \right)^n - \det A \underset{A \rightarrow I_n}{=} O(\|A - I_n\|^2)$.
b) Étudier le signe de $\left(\frac{\text{tr } A}{n} \right)^n - \det A$.

Exercice 812 *X 2023*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une suite de matrices par $M_0 = A$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = M_k - M_k^2$. On étudie la convergence éventuelle de $(M_k)_{k \geq 0}$.

- a) étudier le cas où A admet une valeur propre réelle $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$.
 - b) étudier le cas où A est nilpotente.
 - c) étudier le cas où $A = \lambda I + N$ avec $N \neq 0$, $N^2 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.
 - d) étudier le cas où $A = \lambda I + N$ avec $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.
-

Exercice 813 *X 2017, Centrale 2022*

Pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $O_S := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M^T S M = S\}$. On pose $\mathcal{E} := \bigcap_{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} O_S$.

- a) Montrer que O_S est borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Qu'en déduire sur $\mathcal{E}$?
 - b) Montrer que $PMP^{-1} \in \mathcal{E}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - c) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\{PMP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ soit bornée.
 - d) En déduire que $\mathcal{E} = \{I_n, -I_n\}$.
-

Exercice 814 *Centrale 2022*

Soit $a \in]0, 1[$. On note F le sous-espace vectoriel de $E := \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales.

- a) On pose $f_n : x \mapsto 1 + x + \dots + x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers un élément de E au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - b) Le sous-espace F est-il fermé pour $\|\cdot\|_\infty$?
 - c) Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la suite $(f^{(n)})_n$ soit bornée pour $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que f appartient à l'adhérence de F .
-

Exercice 815 *Ens 2016*

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

- a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$?
 - b) Soient p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\|q(x)\| \leq \|x\|$?
 - c) Soient p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\|q(x)\| \leq \|x\|$.
-

Exercice 816 *Norme exotique*

Montrer que $(x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$: dessiner la boule unité.

Exercice 817 *X 2023*

Donner une condition sur $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour que l'application qui à $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associe $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} u_{i,j}$ atteigne son maximum en un unique U .

**Exercice 818***Ens 2014*

Si (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, on pose : $L(e_1, e_2) = \{m e_1 + n e_2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$. On note A l'ensemble des $a > 0$ tels que les boules ouvertes de rayon a centrées sur les éléments de $L(e_1, e_2)$ soient disjointes.

- Montrer que A est non vide.
 - Montrer que A est de la forme $]0, R]$ avec $R > 0$.
 - Calculer R pour la base canonique.
 - Calculer R pour des vecteurs (e_1, e_2) engendrant un pavage hexagonal.
-

Exercice 819*Mines 2023*

Soit $n \geq 2$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $F(A) = \left\{ \frac{X^T A X}{X^T X}, X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.

- Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset F(A)$.
- Si A est symétrique, montrer que $F(A)$ est un segment.
- Montrer que c'est encore le cas pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ind. écrire A comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 820*Ens 2017*

Soit E l'espace des fonctions continues et C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ à valeurs réelles.

Si $f \in E$, on pose $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f$.

- Si $f \in E$, montrer que $\|f - \bar{f}\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]} \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'|$.
 - Existe-t-il $\alpha < 1$ tel que, pour toute $f \in E$, $\|f - \bar{f}\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]} \leq \alpha \int_{-\pi}^{\pi} |f'|$?
 - Existe-t-il $f \in E$ non nulle telle que $\|f - \bar{f}\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|$?
-

**Exercice 821***X 2020*

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f''\|_{\infty}$.

- Montrer que N est une norme sur E .
 - Montrer qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall f \in E, \|f\|_{\infty} \leq CN(f)$.
 - Montrer que le réel C optimal est $1/8$.
-

Exercice 822*Ens 2018*

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

- Déterminer les $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_{\infty} = \|X\|_{\infty}$.
 - Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_{\infty} = \|X\|_{\infty}$.
-

Exercice 823*X 2023*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. On suppose que $\forall x \neq 0, \|(p - q)(x)\| < \|x\|$.

- a) Montrer que p et q ont le même rang.
b) Montrer que $u = pq + (\text{id} - p)(\text{id} - q)$ est inversible et que $p = uqu^{-1}$.
-

Exercice 824



Mines 2019

Soit $n \geq 2$. Soient (A_k) et (B_k) deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant respectivement vers A et B . On suppose que, pour tout k , A_k est semblable à B_k . Est-il vrai que A est semblable à B ?



Exercice 825

X 2024 (source Kelyan C.)

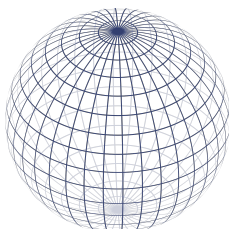
$\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est-il dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 826



X 2007

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et dérivable. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
Montrer que $(e^{if(n)})_{n \geq 0}$ est dense dans le cercle trigonométrique.



Exercice 827

Ens 2016 et 2017

On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire euclidien canonique. On note S^1 la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ et S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

- a) Soit $X \in S^1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que l'ensemble $\{M^k X, k \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans S^1 ?
b) Soit $X \in S^2$. Existe-t-il $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que l'ensemble $\{M^k X, k \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans S^2 ?
-

Exercice 828



Centrale 2012

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique orientée. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- a) Montrer qu'il existe $R \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ telle que : $R^{-1}AR = \|a\|N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$. Calculer S_n . Montrer que (S_n) converge vers une matrice $E(A)$ que l'on caractérisera.

- c) Soient A et B deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (i) Si A et B commutent, montrer que $E(A)$ et $E(B)$ commutent également.
(ii) La réciproque est-elle vraie ?
-

Exercice 829



X 2012

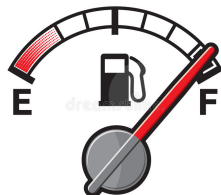
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa norme euclidienne canonique et on pose $K = [a, b]^3$. Soit $f : K \rightarrow K$ telle que :
 $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 830

Ens 2010

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ soit un singleton. Que peut-on dire de c ?
2. On suppose : $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ est compacte. Montrer que f possède un extremum global.
3. On suppose : $\forall c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{c\})$ est compacte. Montrer que $f(x)$ possède une limite (éventuellement infinie) quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

**Exercice 831**

X 2020, Mines 2022

a) On considère le parallélogramme B de sommets $(1,0)$, $(2,2)$, $(-1,0)$ et $(-2,-2)$.Trouver une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont B est la boule unité.b) Soit C un convexe fermé borné, symétrique par rapport à 0 et dont l'intérieur contient 0.On pose $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $N(v) = \inf \{t > 0, \frac{v}{t} \in C\}$.Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont C est la boule unité. On dit que N est la jauge de C .**Exercice 832**

Mines 2018

Soit $G(f) = \{T \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)\}$.a) Montrer que $G(f)$ est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$.b) Calculer $G(f)$ pour $f = t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \cos(\pi t)$ et $t \mapsto \cos(\pi t) + \cos(t)$.**Exercice 833**

Centrale 2018

On pose $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) ; \exists n \in \mathbb{N}^*, A^n = I_2\}$ et $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) ; \forall \lambda \in \text{Sp} A, |\lambda| = 1\}$.a) Montrer que $E \subset F$.b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. En déduire que F est inclus dans l'adhérence de E .c) Montrer que F est fermé. Conclure.**Exercice 834**

Mines 2023

a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\{Q(A), Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé.b) Soient $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $B = Q(A)$.c) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $\{Q(A), A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.**Exercice 835**

Mines 2012

Soit K une partie fermée de $[0, 1]^2$. On suppose que, pour tout $x \in [0, 1]$, l'ensemble $\{y \in [0, 1], (x, y) \in K\}$ est un intervalle non vide. Montrer que K coupe la droite $y = x$.**Exercice 836**

ENS MP 1974

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ non vide. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$: $d_A(x) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$.

1. Montrer que d_A est continue.

2. Soient deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vides A, B . Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.

3. On note $\rho(A, B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|, y \in \mathbb{R}^n\}$, valant éventuellement $+\infty$.

Montrer que l'on a $\rho(A, B) = \max\left(\sup_{x \in A} d_B(x), \sup_{x \in B} d_A(x)\right)$.

Exercice 837



Centrale 2012

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme donnée par : $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $1/\sqrt{n} \leq \|P\| \leq 1$.

b) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = PS$.

c) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que l'ensemble $\{\|S^p\|, p \in \mathbb{Z}\}$ est borné. Montrer que $S = I_n$.

d) Soit G un sous-groupe borné de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 838



Mines 2016

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

a) Soit F un fermé non vide de E . Montrer que x appartient à $E \setminus F$ si et seulement si $d(x, F) > 0$.

b) Montrer que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés.

Exercice 839



X 2017

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique $X_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|MX - Y\| = \min_{X \in \mathbb{R}^p} \|MX - Y\|$.

Exercice 840



Centrale 2022

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(M) = \max_{\|X\|=1} \|MX\|$.

a) Justifier l'existence de $N(M)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Caractériser les M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N(M) = 0$.

Montrer : $\forall Y \in \mathbb{R}^n, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|MY\| \leq N(M)\|Y\|$.

b) Montrer que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(M) = \sqrt{\max(\text{Sp}(M^T M))}$.

c) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $N(A - M) \geq \frac{1}{N(A^{-1})}$.

Exercice 841



X 2011

Déterminer $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que les suites (A^n) et $((A^{-1})^n)$ soient bornées.

Exercice 842



X 2023

On pose : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{P \in E, P = P^T = P^2\}$. Soit $(P, Q) \in F^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f : [0, 1] \rightarrow F$ continue telle que $f(0) = P$ et $f(1) = Q$.

Exercice 843



X 2019

Soit F (resp. K) une partie fermée (resp. compacte) d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si A est une partie de E , on appelle enveloppe convexe de A le plus petit convexe contenant A .

a) L'enveloppe convexe de F est-elle nécessairement fermée ?

b) L'enveloppe convexe de K est-elle nécessairement compacte ?

**Exercice 844**

X 2018 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact non vide.

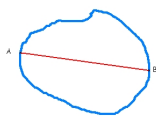
Montrer que $\sup \{|P(z)|, z \in K\}$ est atteint sur la frontière de K .

**Exercice 845**

Centrale 2008

a) Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas O . Montrer qu'il existe une droite passant par O telle que K soit inclus dans l'un des demi-plans délimités par la droite.

b) Soient K et L deux convexes fermés de $\mathbb{R}^2$. On suppose que K est borné et que $K \cap L = \emptyset$. Montrer qu'il existe une droite séparant le plan en deux demi-plans, l'un contenant K et l'autre L .

**Exercice 846**

Diamètre d'une partie

Soit E un evn de dimension finie et $A \subset E$, une partie bornée, fermée et non vide.

Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que $\|a - b\| = \max\{\|x - y\|, (x, y) \in A^2\}$.

**Exercice 847**

X 2017

Pour $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_d X^d \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \max_{0 \leq i \leq d} |\alpha_i|$.

a) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . Montrer que : $|P(m)| \leq (n+1)m^n \|P\|$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . Montrer que : $P(X) = \sum_{i=0}^n P(i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X-j}{i-j}$.

c) Soit $F \in \mathbb{C}[X]$ de degré n ne possédant aucune racine entière. Soit $G \in \mathbb{C}[X]$ de degré $m \in \{1, \dots, n-1\}$. On suppose que G divise F dans $\mathbb{Z}[X]$ c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $F = GQ$. Montrer que : $\|G\| \leq (n+1)m^n(m+1)! \|F\|$.

**Exercice 848**

Mines 2023

Soit E l'espace des suites complexes bornées.

Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ on pose $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont bien définis.

b) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

c) Montrer qu'il existe une constante C telle que $N_2 \leq CN_1$.

d) Montrer qu'il n'existe pas de constante positive D telle que $N_1 \leq DN_2$.

**Exercice 849**

Mines 2023

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$. Soit N la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

a) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $N(A)$ avec les coefficients de A .

- b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A)$ et déterminer les cas d'égalité.
c) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $N(AU) = N(UA) = N(A)$.
d) Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
e) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $m = \inf \left\{ \sum_{i,j} (m_{i,j} - s_{i,j})^2, S \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$.
f) On pose, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Trouver les meilleures constantes a et b telles que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), a N(A) \leq \|A\|_1 \leq b N(A)$.
-

Exercice 850



Ens 2023

Soit E l'espace des fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$.

- a) Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur E .
b) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \leq a \|f\|$.
c) Les normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?
-

Exercice 851



Centrale 2009

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- Montrer que l'application qui à f associe $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ est une norme sur E .
 - Soit $a \in [0, 1]$. L'application $\Phi : f \mapsto f(a)$ est-elle continue pour $\| \cdot \|_1$?
 - Le sous-espace $\text{Ker } \Phi$ est-il fermé ?
 - Reprendre ces questions en remplaçant $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ par l'ensemble F des fonctions polynômiales de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
-

Exercice 852



Mines 2000

On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et on le munit de la norme N_∞ . Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F .

Exercice 853



X 2005

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'existe une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant :
 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall X \in \mathbb{C}^n, \|AX\| \leq N(A) \|X\|$. Soit B la boule de centre I_n et de rayon $\frac{1}{2}$.
Montrer que B ne contient aucun sous-groupe multiplicatif non trivial de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 854



Centrale 2008

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n . Montrer que $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt > 0$.



Exercice 855

X 2019

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A^3 = I_n\}$.

La matrice I_n est-elle un point isolé de $\mathcal{E}_n$? Généraliser.

Exercice 856*X 2023*

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $|I|$ sa longueur. Montrer qu'il existe une famille $(I_j)_{j \in A}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point, deux à deux disjoints et tels que

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{j \in A} I_j \text{ et } \sum_{j \in A} |I_j| = 42.$$

Exercice 857*Mines 2023*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension quelconque, soient f et g deux endomorphismes continus de E tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $f \circ g - g \circ f = \lambda Id$. Déterminer la valeur de λ .

Exercice 858*Ens 2022*

On définit la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $N(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ que l'on déterminera tel que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A - U) \leq \varepsilon$, alors A est inversible.

b) Ce résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$?

Exercice 859*Ens 2023*

Les fonctions considérées sont définies sur $[-1, 1]$.

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $G_\beta : x \mapsto \max(x - \beta, 0)$.

On pose $E = \text{Vect}_{\beta \in \mathbb{R}}(G_\beta) + \mathbb{R}.1$, où 1 est la fonction $x \mapsto 1$.

Soit f une fonction lipschitzienne. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in E, \|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

**Exercice adhérent***Mines MP 2023*

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles

$$A, \bar{A}, \overset{\circ}{A}, \bar{\bar{A}}, \bar{\bar{\bar{A}}}, \bar{\bar{\bar{\bar{A}}}} \text{ et } \bar{\bar{\bar{\bar{\bar{A}}}}}$$

soient deux à deux distincts.