Feuille d'exercices n° 10 : evn

« Não há normas. Todos os homens são excepção a uma regra que não existe. » (Fernando Pessoa)

Season's greetings

Exercice 628 *convexité d'une boule*

Soient E un e.v.n. , $a \in E$ et $r > 0$. On note $B = \mathcal{B}_f(a,r)$ et $B' = \mathcal{B}_o(a,r)$.

1. Montrer que B et B' sont convexes.
2. Si la norme est euclidienne, montrer que si $(u,v) \in B^2$ avec $u \neq v$, alors $]u,v[\ \subset B'$. ($]u,v[\ = \{(1-t)u + tv \text{ avec } t \in\ ]0,1[\ \}$).
3. En déduire que si la norme est euclidienne, toute partie A telle que $B' \subset A \subset B$ est convexe.
4. Donner un contre-exemple avec une norme non euclidienne.

Les basiques

Exercice 629 *Mines 2024*

Les parties $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 2x^2 - y(y-1) = 0\}$ sont elles fermées ? bornées ?

Exercice 630 *X 2018*

Soit E un espace vectoriel normé. Soit F un s.e.v. de E et soit $u \in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$ tel que :
$\forall x \in F,\ |u(x)| \leqslant \|x\|$.
Montrer que $\forall (x,z) \in F^2, \forall y \in E,\ u(x) - \|x-y\| \leqslant \|y+z\| - u(z)$.

Exercice 631 Soit E evn de dim finie, montrer que l'ensemble des projecteurs de E est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 632 *X 2018 et 2022*

a) Déterminer les matrices A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

b) Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite de matrices $\left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} A^i\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 633 *X 2019* Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ de terme général $v_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{u^i}{i}$ converge.

Exercice 634 *X 2011, Mines 2022 et 2023*

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Caractériser la limite de $\begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}^n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 635 *X 2019* Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ (x,y) \text{ libre}\}$.
Montrer que Ω est ouvert :
a) en montrant que son complémentaire est fermé,
b) en utilisant le produit vectoriel.

Exercice 636 *Mines 2023 et 2024*

a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\{Q(A)\ ;\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
b) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.
c) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $\{Q(A)\ ;\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il fermé ? borné ?

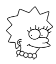
Exercice 637 *Centrale 2024*

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) La matrice T est-elle diagonalisable ?
b) La matrice T est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables ?
c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant c\,|\mathrm{Im}(z)|$.
d) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$. Montrer que A est trigonalisable.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 638 *convexité de la boule fermée unité et inégalité triangulaire*
Soit E un $\mathbb{K}$.e.v. et soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés de séparation et d'homogénéité.
Soit $B = \{x \in E, N(x) \leqslant 1\}$.
Montrer que N est une norme si et seulement si B est convexe.

Exercice 639  Soit E un e.v.n. de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ colinéaire à v_n, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$.
Montrer que u et v sont colinéaires.

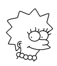
Exercice 640  *Mines 2024*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $B^2 = B$, $BA = AB$. Déterminer $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$.
b) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| < 1\} \cup \{1\}$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de A alors $B = 0$.
c) Montrer que la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique de A est égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.

Exercice 641  Soit A une partie d'un evn E à la fois ouverte et fermée. On pose $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $A = \varnothing$ ou $A = E$.

Exercice 642  *Ens 2019, X 2009, 2011, 2014, Mines 2014, 2017, Centrale 2010*
Existe-t-il une norme $\| \ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par similitude ?

Exercice 643  Soit E un evn et $A \subset E$ une partie $\neq \varnothing$. Montrer que $x \longmapsto d(x, A)$ est continue.

Exercice 644  *Centrale 2009* Soient $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien et F un fermé non vide de E.
Pour $x \in E$, on pose : $d(x, F) = \inf_{f\in F} \|x - f\|$ (où $||.||$ est la norme euclidienne).

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $f_0 \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - f_0\|$.
2. On suppose F convexe. Montrer que f_0 est unique.

3. On suppose que F est convexe et qu'il ne contient pas 0. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi \in E^*$ tels que : $\forall x \in F, \varphi(x) \geqslant a$. (☛ Utiliser $x \mapsto \langle x_0, x\rangle$ où $x_0 \in F$ vérifie $\|x_0\| = d(0, F)$.)

Exercice 645 *X 2014, Mines et Centrale 2022*

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c) Déduire de a) le 

Exercice 646 *Mines 2022*

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $\geqslant 1$.
Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$.
b) En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors χ_A est scindé.
c) Déterminer l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 647 *Ens 2016 et 2018*

On munit $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant d} |a_{i,j}|$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
(i) Montrer que la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ converge. On note $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.
(ii) Montrer que si A et B commutent alors $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$.
b) Calculer $\exp(A)$ pour $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
On fixe A et B et on note $T_n = \exp(A/n)\exp(B/n)$ et $S_n = \exp\left((A+B)/n\right)$.
c) Montrer que $\|S_n - T_n\|_\infty = O(1/n^2)$.
d) Déterminer la limite de $((T_n)^n)$.
e) L'application $A \mapsto \exp(A)$ est-elle injective ?
f) Si A et B sont dans E, a t-on toujours $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$?
g) Déterminer $\{\exp(A),\ A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 648 *Ens 2015, Mines 2022 et 2023*

a) Soient $p \in]1, +\infty[$, $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $|tx + (1-t)y|^p \leqslant t|x|^p + (1-t)|y|^p$.
b) Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$. Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_p \leqslant 1\}$. Montrer que B est convexe.
c) Soient x et y dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$. En déduire que $\| \ \|_p$ est une norme.
d) Pour quelles valeurs de p cette norme est-elle euclidienne ?

Exercice 649 *Mines 2018 et 2019*

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E de dimension finie.
On note $A + B = \{a + b \text{ tq } a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que

1. Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.
3. Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 650 *X 2008*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure possédant une unique valeur propre a.
Montrer l'équivalence entre : (i) $|a| < 1$, (ii) $M^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, (iii) $\sum M^p$ converge.

Exercice 651 *Mines 2023*
Soient $\in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A^k) \to 0$ quand $k \to +\infty$.
Montrer que $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A),\ |\lambda| < 1$.

Exercice 652 *X 2019, Mines 2019 et 2022 et 2023* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.
b) Montrer que M est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à sa classe de similitude.

Exercice 653 *X 2007 et 2012, Centrale 2011, Mines 2022* Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $[a, b]$.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

Les autres

Exercice 654 Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E. Montrer que $\operatorname{Vect}\mathcal{O} = E$.

Exercice 655 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de a.
Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$

Exercice 656 *Ens 2023*
On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \langle Ax, x\rangle\,\mathrm{d}x$ où $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre x_0 et de rayon r.

Exercice 657 *X 2023*
Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que $A(0) = A(1) = I_n$ et $A(s+t) = A(s)A(t)$ pour tous s, t.
a) Donner des exemples non triviaux de telles applications.
b) Montrer qu'il existe P inversible et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = P \times \operatorname{diag}(e^{i2\pi\lambda_1 t}, \dots, e^{i2\pi\lambda_n t}) \times P^{-1}.$$

Exercice 658 *Ens 2023*

On note $\| \ \|_1$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Montrer que $\|x + y\|_1 + \|x - y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1) \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k y_k = 0$.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui préserve la norme $\| \ \|_1$: $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\|_1 = \|x\|_1$.

Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de f sur la base canonique est une matrice de permutation signée, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ vérifiant $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \varepsilon_j \delta_{i,\sigma(j)}$.

Exercice 659 *Ens 2024*

On considère $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, où le spectre est pris sur $\mathbb{C}$.

L'application f est-elle lipschitzienne ?

Exercice 660 *X 2024*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ deux réels, $I = [\,a, b\,]$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans I.

On note P_j l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vaut 1 en x_j et 0 en chaque x_i pour $i \neq j$.

Pour $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $t \in I$, on note $L(f)(t) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) P_j(t)$ et $\varphi(t) = \sum_{j=0}^{n} |P_j(t)|$.

Montrer que $\|L(f)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 661 *X 2016, Mines 2023 et 2024*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\langle A^{k+1} X, X \rangle}{\langle A^k X, X \rangle}$ a une limite quand $k \to +\infty$, et que cette limite est une valeur propre de A.

Exercice 662 *Ens 2023*

Soient $\varepsilon \in \left] 0 \,; \dfrac{1}{4} \right[$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} 1-2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

a) Quel est le spectre de M ?

b) Déterminer la limite de la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 663 *Centrale 2022*

a) Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui vérifie $M^2 = A$. Montrer qu'une telle matrice est unique. On la notera $\sqrt{A}$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ fixée. On considère la suite matricielle $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = I_n$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $U_{p+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_p + A U_p^{-1}\right)$. Montrer qu'une telle suite est bien définie et qu'elle converge vers $\sqrt{A}$.

Exercice 664 *Ens 2011* On se place dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que : $\left(\dfrac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n - \det A \underset{A \to I_n}{=} O\left(\|A - I_n\|^2\right)$.

b) Étudier le signe de $\left(\dfrac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n - \det A$.

Exercice 665  *X 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une suite de matrices par $M_0 = A$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = M_k - M_k^2$. On étudie la convergence éventuelle de $(M_k)_{k \geqslant 0}$.
a) étudier le cas où A admet une valeur propre réelle $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$.
b) étudier le cas où A est nilpotente.
c) étudier le cas où $A = \lambda I + N$ avec $N \neq 0$, $N^2 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.
d) étudier le cas où $A = \lambda I + N$ avec $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.

Exercice 666 *X 2017* Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{E} = \{PMP^{-1},\ P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})\}$.
Montrer que $\mathcal{E}$ est borné si et seulement si M est une homothétie.

Exercice 667  *Centrale 2022*
Soit $a \in \,]0,1[$. On note F le sous-espace vectoriel de $E := \mathcal{C}([-a,a],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales.
a) On pose $f_n : x \mapsto 1 + x + \cdots + x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers un élément de E au sens de la norme $\| \ \|_\infty$.
b) Le sous-espace F est-il fermé pour $\| \ \|_\infty$?
c) Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la suite $(f^{(n)})_n$ soit bornée pour $\| \ \|_\infty$.
Montrer que f appartient à l'adhérence de F.

Exercice 668  *X 2024*
On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\}$ et $\|P\| = \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} |P(z)|$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit la suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ en posant $P_0 = P$ puis $P_{n+1} = (P_n')^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|P\| < \varepsilon$, alors $\lim_{n \to +\infty} \|P_n\| = 0$.

Exercice 669  *Ens 2016*
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Existe-t-il une norme $\| \ \|$ sur E telle que : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$?
b) Soient p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$. Existe-t-il une norme $\| \ \|$ sur E telle que : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ et $\|q(x)\| \leqslant \|x\|$?
c) Soient p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$. Existe-t-il une norme $\| \ \|$ sur E telle que : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ et $\|q(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 670  *Ens 2015*
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in E$, on pose $|||A||| = \sup\{\|AX\|\ ;\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$.
a) Montrer que $|||\ |||$ est une norme sur E.
b) Soient A et B dans E. Montrer : $|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||$.
c) Soit $A \in E$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = |||A^n|||^{1/n}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 671 *Norme exotique*

Montrer que $(x,y) \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$: dessiner la boule unité.

Exercice 672 *Centrale 2011, Ens 2024* Soit $n \geqslant 2$. a) Montrer que toute matrice $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de deux matrices orthogonales.
b) Montrer que $\|M\| = \sup_{O\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |\operatorname{tr} OM|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 673 *X 2023*

Donner une condition sur $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour que l'application qui à $U = (u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associe $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}u_{i,j}$ atteigne son maximum en un unique U.

Exercice 674 *Ens 2014*

Si (e_1,e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, on pose : $L(e_1,e_2) = \{m\,e_1 + n\,e_2,\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$. On note A l'ensemble des $a>0$ tels que les boules ouvertes de rayon a centrées sur les éléments de $L(e_1,e_2)$ soient disjointes.
a) Montrer que A est non vide.
b) Montrer que A est de la forme $]0,R]$ avec $R>0$.
c) Calculer R pour la base canonique.
d) Calculer R pour des vecteurs (e_1,e_2) engendrant un pavage hexagonal.

Exercice 675 *Mines 2023*

Soit $n \geqslant 2$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $F(A) = \left\{\dfrac{X^TAX}{X^TX},\ X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\right\}$.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset F(A)$.
b) Si A est symétrique, montrer que $F(A)$ est un segment.
c) Montrer que c'est encore le cas pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ind. écrire A comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

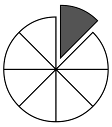
Exercice 676 *Ens 2017*

Soit E l'espace des fonctions continues et C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ à valeurs réelles.
Si $f\in E$, on pose $\bar{f} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f$.

a) Si $f\in E$, montrer que $\|f-\bar{f}\|_\infty^{[-\pi,\pi]} \leqslant \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f'|$.

b) Existe-t-il $\alpha<1$ tel que, pour toute $f\in E$, $\|f-\bar{f}\|_\infty^{[-\pi,\pi]} \leqslant \alpha\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f'|$?

c) Existe-t-il $f\in E$ non nulle telle que $\|f-\bar{f}\|_\infty^{[-\pi,\pi]} = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f'|$?

Exercice 677  *X 2020*

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = ||f''||_\infty$.

a) Montrer que N est une norme sur E.

b) Montrer qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall\, f \in E, ||f||_\infty \leqslant CN(f)$.

c) Montrer que le réel C optimal est $1/8$.

Exercice 678  *Ens 2018*

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\ \|_\infty$.

a) Déterminer les $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_\infty = \|X\|_\infty$.

b) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_\infty = \|X\|_\infty$.

Exercice 679  *X 2023*

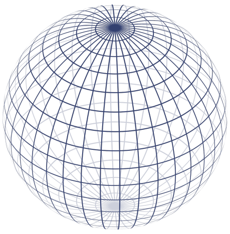
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. On suppose que $\forall x \neq 0$, $\|(p-q)(x)\| < \|x\|$.

a) Montrer que p et q ont le même rang.

b) Montrer que $u = pq + (\mathrm{id} - p)(\mathrm{id} - q)$ est inversible et que $p = uqu^{-1}$.

Exercice 680  *Mines 2019*

Soit $n \geq 2$. Soient (A_k) et (B_k) deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant respectivement vers A et B. On suppose que, pour tout k, A_k est semblable à B_k. Est-il vrai que A est semblable à B ?



Exercice 681 *Ens 2016 et 2017*

On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire euclidien canonique. On note S^1 la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ et S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

a) Soit $X \in S^1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que l'ensemble $\{M^k X,\ k \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans S^1 ?

b) Soit $X \in S^2$. Existe-t-il $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que l'ensemble $\{M^k X,\ k \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans S^2 ?

Exercice 682  *Ens 2019*

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

a) Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite de matrices de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ converge. On note $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ sa limite.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que $\exp(tA)$ soit stochastique pour tout $t \geqslant 0$.

Exercice 683  *X 2018* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$ converge.

b) On suppose que la somme est égale à I_n. Montrer que M est diagonalisable.

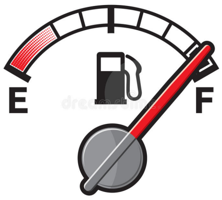
Exercice 684  *Ens 2010* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ soit un singleton. Que peut-on dire de c ?
2. On suppose : $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ est compacte. Montrer que f possède un extremum global.
3. On suppose : $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{c\})$ est compacte. Montrer que $f(x)$ possède une limite (éventuellement infinie) quand $\|x\| \to +\infty$.

Exercice 685 *convexité d'une boule*

Soient E un e.v.n. , $a \in E$ et $r > 0$. On note $B = \mathcal{B}_f(a, r)$ et $B' = \mathcal{B}_o(a, r)$.

1. Montrer que B et B' sont convexes.
2. Si la norme est euclidienne, montrer que si $(u, v) \in B^2$ avec $u \neq v$, alors $]u, v[\ \subset B'$. ($]u, v[\ = \{(1-t)u + tv$ avec $t \in]0, 1[\,\}$).
3. En déduire que si la norme est euclidienne, toute partie A telle que $B' \subset A \subset B$ est convexe.
4. Donner un contre-exemple avec une norme non euclidienne.



Exercice 686 *X 2020, Mines 2022*

a) On considère le parallélogramme B de sommets (1,0), (2,2), (-1,0) et (-2,-2).
Trouver une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont B est la boule unité.
b) Soit C un convexe fermé borné, symétrique par rapport à 0 et dont l'intérieur contient 0.
On pose $\forall\, v \in \mathbb{R}^2, N(v) = \inf\{t > 0, \dfrac{v}{t} \in C\}$.
Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont C est la boule unité. *On dit que N est la jauge de C.*

Exercice 687 *Centrale 2018*

On pose $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = I_2\}$ et $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\ ;\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}A,\ |\lambda| = 1\}$.
a) Montrer que $E \subset F$.
b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$. En déduire que F est inclus dans l'adhérence de E.
c) Montrer que F est fermé. Conclure.

Exercice 688 *Mines 2012*

Soit K une partie fermée de $[0,1]^2$. On suppose que, pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble $\{y \in [0,1],\ (x,y) \in K\}$ est un intervalle non vide. Montrer que K coupe la droite $y = x$.

Exercice 689 *ENS MP 1974*

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ non vide. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$: $d_A(x) = \inf\{\|x-y\|\,,\ y \in A\}$.

1. Montrer que d_A est continue.
2. Soient deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vides A, B. Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.
3. On note $\rho(A,B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, valant éventuellement $+\infty$.

   Montrer que l'on a $\rho(A,B) = \max\left(\sup\limits_{x\in A} d_B(x),\ \sup\limits_{x \in B} d_A(x)\right)$.

Exercice 690 *Centrale 2012*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme donnée par : $\|A\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $1/\sqrt{n} \leqslant \|P\| \leqslant 1$.
b) Soit $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = PS$.
c) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que l'ensemble $\{\|S^p\|,\ p \in \mathbb{Z}\}$ est borné. Montrer que $S = I_n$.
d) Soit G un sous-groupe borné de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 691 *Mines 2016*

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
a) Soit F un fermé non vide de E. Montrer que x appartient à $E \setminus F$ si et seulement si $d(x,F) > 0$.
b) Montrer que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés.

Exercice 692 *X 2024*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P_0\|_\infty = \min\{\|f-P\|_\infty\,, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

Exercice 693 *Ens 2019* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \{0,\ldots,n\}$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique, on note R_r^n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang majoré par r. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que la distance de A à R_r^n est atteinte.
b) Calculer cette distance lorsque $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, puis dans le cas général.

Exercice 694 *X 2017*

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique $X_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $||MX - Y|| = \min\limits_{X\in\mathbb{R}^p} ||MX - Y||$.

Exercice 695 *Ens 2024*

Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que $x,\ y\ \in A$ sont connectés si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{C}^0\left([0,1]\,,A\right)$ telle que $f\left(0\right) = x$ et $f\left(1\right) = y$.

a) Montrer que tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont connectés.
b) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
c) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{x,\ \|x\| = 1\}$.
d) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{B}_o\,(i, \varepsilon)$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

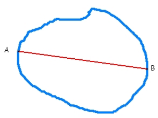
Exercice 696  *X 2023*
On pose : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \left\{P \in E,\ P = P^T = P^2\right\}$. Soit $(P, Q) \in F^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f : [0,1] \to F$ continue telle que $f(0) = P$ et $f(1) = Q$.

Exercice 697  Soit E euclidien, muni d'un repère orthonormé.
Soit A une partie de E.

1. Montrer que l'intersection de toutes les parties convexes contenant A est une partie convexe de E contenant A. On l'appelle l'enveloppe convexe de A, on la note $\mathrm{conv}(A)$. C'est le plus petit convexe pour l'inclusion contenant A.
2. Montrer que $\mathrm{conv}(A) = A \iff A$ convexe.
3. On dit que G est un barycentre de points de A s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, ..., A_n \in A^n$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ tels que $\overrightarrow{OG} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.
   Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de points de A affectés de coefficients positifs.
4. **Théorème de Gauss-Lucas :** Soit P un polynôme de $\mathbb{C}\,[X]$ de degré $\geqslant 2$. On identifie un complexe et son affixe dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P.

Exercice 698  *X 2018* Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact non vide.
Montrer que $\sup\left\{|P(z)|,\ z \in K\right\}$ est atteint sur la frontière de K.

Exercice 699  *Centrale 2008*
a) Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas O. Montrer qu'il existe une droite passant par O telle que K soit inclus dans l'un des demi-plans délimités par la droite.
b) Soient K et L deux convexes fermés de $\mathbb{R}^2$. On suppose que K est borné et que $K \cap L = \varnothing$. Montrer qu'il existe une droite séparant le plan en deux demi-plans, l'un contenant K et l'autre L.



Exercice 700 *Diamètre d'une partie*
Soit E un evn de dimension finie et $A \subset E$, une partie bornée, fermée et non vide.
Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que $||a - b|| = \max\{||x - y||, (x, y) \in A^2\}$.

Exercice 701 *Centrale 2011*
a) Soient $a_0, \ldots, a_n$ distincts dans $\mathbb{C}$, $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_0, \ldots, a_n)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exprimer χ_A à l'aide de $(L_0, \ldots, L_n)$.
b) En déduire que $A \mapsto \chi_A$ est continue.
c) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose A inversible. Montrer que AB est semblable à BA.
En déduire : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
d) Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 702 *Mines 2023*
Soit E l'espace des suites complexes bornées.
Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on pose $N_1(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$.
a) Montrer que N_1 et N_2 sont bien définis.
b) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
c) Montrer qu'il existe une constante C telle que $N_2 \leqslant CN_1$.
d) Montrer qu'il n'existe pas de constante positive D telle que $N_1 \leqslant DN_2$.

Exercice 703 *Centrale 2010* Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées.

1. Montrer que E un espace vectoriel.
   Si $p \in \mathbb{N}^*$, soit $N_p : f \in E \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|t^p e^{-|t|} f(t)\right|$.
2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, montrer que $N_p(f)$ appartient à $\mathbb{R}^+$. Montrer que N_p définit une norme sur E.
3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $\Psi_a : f \in E \mapsto f(a)$. L'application Ψ_a est-elle continue pour (E, N_p) ?
4. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $p \neq q$. Montrer que N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Exercice 704 *Centrale 2009* Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application qui à f associe $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$ est une norme sur E.
2. Soit $a \in [0, 1]$. L'application $\Phi : f \mapsto f(a)$ est-elle continue pour $\| \ \|_1$?
3. Le sous-espace $\operatorname{Ker} \Phi$ est-il fermé ?
4. Reprendre ces questions en remplaçant $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ par l'ensemble F des fonctions polynômiales de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 705 *Centrale 2008*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n. Montrer que $\displaystyle\inf_{P\in E_n} \int_0^1 |P(t)|dt > 0$.

Exercice 706 *X 2019* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ A^3 = I_n\}$.
La matrice I_n est-elle un point isolé de $\mathcal{E}_n$? Généraliser.

Exercice 707 *X 2024*

Soit E une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $B(0,1) \subset E$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(E) \subset E$. Montrer que $|\det(M)| \leqslant 1$.

Exercice 708 *X 2024*

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour n'importe quelle permutation de ses n^2 coefficients, on obtienne toujours une matrice inversible.

Exercice 709 *X 2024*

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $p = \mathrm{rg}(A(t_0))$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [\,t_0 - \varepsilon\,;t_0 + \varepsilon\,]$, on ait $\mathrm{rg}(A(t)) \geqslant p$.

Exercice 710 *Mines 2023*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque, soient f et g deux endomorphismes continus de E tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $f \circ g - g \circ f = \lambda Id$. Déterminer la valeur de λ.

Exercice 711 *Ens 2022*

Soit E un espace vectoriel normé dans lequel toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

a) Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et des vecteurs $y_1, \dots, y_n$ de E tels que : $B(0,1) \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, 1/2)$ (toutes les boules sont supposées fermées).

b) En déduire que $\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$ est dense dans E, puis que E est de dimension finie.

Exercice 712 *Ens 2023*

a) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f' et g' soient bornées sur $\mathbb{R}$.
Soit $h = \inf(f, g)$. Montrer que la fonction h est lipschitzienne. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

b) Soit $f : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos(2\pi n t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

c) Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne qui prolonge f.

d) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est k-lipschitzienne. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne qui prolonge f.

Exercice adhérent *Mines MP 2023*

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles

$$A, \bar{A}, \mathring{A}, \bar{\mathring{A}}, \mathring{\bar{A}}, \bar{\mathring{\bar{A}}} \text{ et } \mathring{\bar{\mathring{A}}}$$

soient deux à deux distincts.
