PC $\overset{\star}{2}$ **Feuille d'exercices n^{o} 9 : exercices d'analyse à analyser**

« L'analyse a pour but l'avènement d'une parole vraie. » Jacques Lacan, *Ecrits, 1966*

Les basiques

Exercice 658 *X 2023*
Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et croissantes. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u - v) = \lambda v + g(v - u) = 0$.

Exercice 659 *Ens 2022, X 2023*
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 660 *X 2023*
Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f' + af$ s'annule sur $]0, 1[$.

Exercice 661 *Mines 2022*
a) Existe-t-il une application f continue surjective $f : [0, 1] \to]0, 1[$?
b) Existe-t-il une application f continue surjective $f :]0, 1[\to [0, 1]$?

Exercice 662 *Mines 2023*
On pose $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x) \exp(-x^2)$.
b) Déterminer le nombre de racines de P_n.

Exercice 663 *X 2016*
Déterminer la valeur moyenne de $t \mapsto (\cos t)^{100}$.

Exercice 664 *Mines 2016*
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x\, f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 665 *X et Mines 2023*
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geqslant \frac{4n}{10}$.

Exercice 666 *Mines 2023* Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \right\}$.
Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto f(x + 1)$.
a) Justifier que E est un espace vectoriel et que T est un endomorphisme de E.
b) Déterminer les éléments propres de T.

Les incontournables

Exercice 667 *X 2016, Ens 2022*
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
a) Le fait que f' tende vers 0 en $+\infty$ implique-t-il que f admet une limite finie en $+\infty$?
b) Le fait que f tende vers 0 en $+\infty$ implique-t-il que f' tend vers 0 en $+\infty$?
c) On suppose que f et f' tendent vers des réels respectifs a et b en $+\infty$. Montrer que $b = 0$.
d) On suppose que $f + f'$ tend vers un réel a en $+\infty$. Montrer que f et f' ont des limites finies en $+\infty$, et les préciser.
e) Généralisation. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} \sum_{k=0}^n f^{(k)} = a$ ($a \in \mathbb{R}$).
Montrer que f, f', …, $f^{(n)}$ admettent des limites finies en $+\infty$.

Exercice 668 *X 2017* Soit $n \in \mathbb{N}$. Comment faire pour calculer $\cos(1)$ à 10^{-n} près ?

Exercice 669 *X 2010* Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$. Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(ax) = x$.

Exercice 670 *X 2008 et 2010* Déterminer $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{3})$.

Exercice 671 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tq $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \ell$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$

Exercice 672 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.
A-t-on le même résultat si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$?

Exercice 673 *Mines 2017*

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
2. Que peut-on dire si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) = \ell$?

Exercice 674 *Ens 2023*
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ un réel.
On suppose que $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. étudier la limite de f et de f' en $+\infty$.

Exercice 675 *X 2013* Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ dérivable tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
a) Montrer que $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ admet une limite finie en $+\infty$. b) Nature de la série de terme général $f(n)$?

Exercice 676 *Centrale 2016*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

a) Montrer qu'il existe, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\, f(x)$.

b) Déterminer le coefficient dominant, le degré, la parité de P_n.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 677 *X 2012 et 2019 et 2022* *Inégalités de Kolmogorov*[1]

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

On pose $\sup |f| = M_0$ et $\sup |f''| = M_2$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 entre x et $x+h$, montrer que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.

b) Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que , si on note $\sup |f'| = M_1$, $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 678 *Mines 2017 et 2019*

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, e^t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\, e^{-t} \,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{sh}(a+t) f(t) \mathrm{d}t = 0$. En déduire que f admet au moins deux zéros dans $]0,1[$.

Exercice 679 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \ell$.

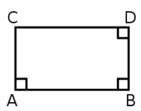
A quel mathématicien italien bien connu ce résultat vous fait-il penser ?

Les autres

Exercice 680  *X 2018* Soit $f : x \mapsto e^x - 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, X^k$.

Montrer, pour n impair, que T_n ne possède pas de racine réelle non nulle.

Montrer, pour n pair, que T_n possède une unique racine réelle non nulle.

Exercice 681 

X 2018

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Montrer l'existence de $C \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f\left([k/n, (k+1)/n]\right)$ soit inclus dans un rectangle d'aire C/n^2.

---

1. (**Андреї Николаїевитч Колмогоров**) mathématicien russe et soviétique, il résout le 13ème problème de Hilbert et c'est lui qui fonde la théorie axiomatique des probabilités.

Exercice 682 *X 2014*
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ stabilisant l'ensemble des intervaux ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que f est monotone.

Exercice 683 *X 2014*
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On note A l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que :$\exists (x_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, $x_n \to +\infty$ et $f(x_n) \to a$.
Si $a, b \in A$, montrer que $[a,b] \subset A$.

Exercice 684 *Ens 2022* Soient r un entier supérieur ou égal à deux et $P(X) = X^r - \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} X^k$.
a) Montrer que les racines de P ont toutes un module inférieur ou égal à 1 et que 1 est la seule racine de P de module 1.
b) Montrer que les racines de P sont simples. *Ind. On pourra considérer le polynôme* $Q(X) = (X-1)P(X)$.
c) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ des nombres complexes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \alpha_0, u_1 = \alpha_1, \ldots, u_{r-1} = \alpha_{r-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+r} = \dfrac{1}{r}\left(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+r-1}\right)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 685 *Mines 2023*
a) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(2x) = 0$.
b) Soient a, b, c trois réels strictement positifs distincts.
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$.

Exercice 686 *Ens 2018*
a) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 1$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leqslant f(x) \times f(y)$$

b) Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, non de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leqslant f(x) \times f(y)?$$

Exercice 687 *Mines 2023*
Soit E l'ensemble des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x, y la relation

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)\ f(y)$$

a) Soit $f \in E \setminus \{0\}$. Calculer $f(0)$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$. On pourra fixer une primitive de f et intégrer l'équation fonctionnelle par rapport à y.
c) Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice 688 *X 2023*
Soit $g : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ une fonction continue telle que : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U},\ g(z_1 z_2) = g(z_1)g(z_2)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = g(e^{it})$.
a) Quelle égalité fonctionnelle vérifie f ?

b) En introduisant $F : t \mapsto \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{i\lambda t}$.
d) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{U},\ g(z) = z^n$.
e) Déterminer l'ensemble des fonctions continues $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ telles que : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*,\ h(z_1 z_2) = h(z_1)h(z_2)$.

Exercice 689 *Mines 2022 et 2023*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$.
Montrer qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x)$.

Exercice 690 *X 2015, Mines 2022 et 2023*
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)\,f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$.

Exercice 691 *Ens 2019* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie $(*)$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
a) Déterminer les fonctions continues vérifiant $(*)$.
b) Si f vérifie $(*)$ et si f n'est pas linéaire, montrer que le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.
c) Déterminer les f vérifiant $(*)$ et pour lesquelles il existe $n > 1$ tel que :
$\forall x > 0,\ f(x^n) = f(x)^n$.

Exercice 692 *Mines 2023*
Soient $c \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ croissante telle que $f(cx) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(x)$.
a) Montrer que, pour tout $d > 0$, on a $f(dx) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(x)$.
b) Donner un exemple de fonction f strictement croissante qui vérifie l'hypothèse de cet exercice.

Exercice 693  *X 2010*[2] Montrer que malgré le réchauffement climatique, il existe deux points du globe terrestre situés aux antipodes l'un de l'autre et qui ont exactement la même température.

Exercice 694  *Mines 2009* Est-il possible de parcourir 250 km en 2h30 sachant que sur tout intervalle de temps d'une heure on parcourt 90 km ?

Exercice 695 *Centrale 2013* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ non constante.
a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $f([0,1]) = [a,b]$.
b) Montrer que $f \circ f = f$ si et seulement si : $\forall x \in f([0,1]),\ f(x) = x$.
c) Si $f \circ f = f$ et $f([0,1]) = [a,b]$ avec $0 < a < b \leqslant 1$, montrer que f n'est pas dérivable en a.

2. Exercice proposé par la COP29

Exercice 696 *Mines 2022*
On admet que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) continue et injective est strictement monotone.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x$.
a) Soit $f \in \mathcal{E} \setminus \{Id\}$. Montrer que f est strictement décroissante.
b) Montrer que f admet un point fixe d. Soit g la restriction de f à $[d, +\infty[$.
Montrer que g est continue et strictement décroissante et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$.
c) Réciproquement, montrer que si g est définie sur $[d, +\infty[$, continue, strictement décroissante et telle que $g(d) = d$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, alors il existe une fonction continue f, qui prolonge g sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = x$.

Exercice 697 *X 2015 et Mines 2023* Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = 1 + f(x)$.

Exercice 698 *X 2020*
a) Montrer qu'il n'existe pas de $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in N, (f \circ f)(n) = n + 1$.
b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ pair. Montrer l'existence de $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in N, (f \circ f)(n) = n + p$.
c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer l'inexistence de $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in N, (f \circ f)(n) = n + p$.

Exercice 699 *Mines 2019*
a) Montrer que cos admet un unique point fixe.
b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 700 *Mines 2019*
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\sin x)$. Donner une généralisation.

Exercice 701 *Mines 2019*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. a) On suppose que la fonction $\cos \circ f$ est constante. La fonction f est-elle constante ?
b) On suppose que la fonction $\sin \circ f$ admet une limite réelle en $+\infty$. La fonction f admet-elle une limite réelle en $+\infty$?

Exercice 702 *Mines 2023*
Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g$ est strictement décroissante.
a) Montrer que $f \circ g$ admet un unique point fixe.
b) Montrer que $g \circ f$ admet un unique point fixe.

Exercice 703 *Mines 2023*
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1], [0,1])$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 704 *X 2009*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Exercice 705 *Centrale 2022*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite α-hölderienne lorsqu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha$.
a) On suppose $\alpha > 1$. Montrer que toute fonction α-hölderienne est dérivable. En déduire quelles sont les fonctions α-hölderiennes.
b) On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $x \mapsto x^\alpha$ est α-hölderienne.
c) On pose $f(x) = \dfrac{1}{-1+\ln x}$ si $x \in]0,1]$, et $f(0) = 0$.
Montrer que f n'est pas α-hölderienne.

Exercice 706 *X 2014, Mines 2022*
Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'ensemble $f([a,b])$ est un segment de longueur $b - a$.

Exercice 707 *Centrale 2011, Mines 2014, 2022 et 2023*
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(y)\,e^x + f(x)\,e^y$.

Exercice 708 *X 2016*
Montrer l'existence et l'unicité de $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f \circ f(x) + f(x) = 42\,x$.

Exercice 709 *X 2017 et Mines 2023*
a) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivables en 0 et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2\,f(x)$.
b) Exprimer $\mathrm{th}(2x)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
c) Déterminer les $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},]-1,1[)$ dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = \dfrac{2\,g(x)}{1+g(x)^2}$.
d) Déterminer les $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = \dfrac{2\,g(x)}{1+g(x)^2}$.

Exercice 710 *Ens 2014* Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que : $\forall (c,d) \in [a,b]^2$ avec $c < d$: $\dfrac{1}{d-c}\displaystyle\int_c^d f = \dfrac{f(c)+f(d)}{2}$.

Exercice 711 *X 2015 et 2016*
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ et $y_0 > f(x_0)$ tels que le cercle de centre (x_0, y_0) et passant par $(x_0, f(x_0))$ soit au dessus du graphe de f. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

Exercice 712 *Ens 2015*

On pose $\cos : z \in \mathbb{C} \mapsto \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels. On suppose : $a_n > \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kz)$. Montrer que les zéros de f sont réels.

Exercice 713 *X 2012 et Mines 2023*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est bornée et que f'' est positive. Montrer que f est constante.

Exercice 714 *X 2011*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe et non affine. Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) + f(a - x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 715 *X 2009 et Centrale 2010* Soit $E = \left\{ \dfrac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}$.

1. Montrer que tout élément de $[0, 1]$ est limite d'une suite d'éléments de E.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ f\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} (f(x) + f(y))$.
   Montrer que f est convexe.

Exercice 716 *X 2009* Trouver tous les couples de fonctions (f, g) où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) - f(y) = (x - y)\, g\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$.

Exercice 717 *Mines 2019*

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \in [f(x), f(y)]$.

Exercice 718 *Mines 2023*

Soient α, β, γ des réels positifs avec $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Montrer que $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqslant \dfrac{1}{8}\cdot$

Exercice 719 *X 2019* Soient $x > 0$ et $\lambda(x)$ l'unique solution strictement positive de l'équation $x^4 + x^3 = \lambda$. Donner un développement asymptotique avec trois termes de $\lambda(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 720 *Mines 2019*

En étudiant un développement limité de $(e^x - 1)^n$ au voisinage de 0, montrer que, pour tout $m \in \{0, \dots, n\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m = \delta_{m,n} (-1)^n n!.$$

Exercice 721 *X 2010*

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

Exercice 722 *X 2023*

On appelle polynôme trigonométrique réel toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une formule $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et des constantes $a_k \in \mathbb{C}$. Trouver tous les couples (f,g) de polynômes trigonométriques réels tels que $f^2 + g^2 = 1$.

Exercice 723 *X 2020* Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ telle que $0 \leqslant f'' \leqslant f$ et $0 \leqslant f'$. Montrer que $f \geqslant f'$.

Exercice 724 *X 2011 et 2015*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est majorée et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f'' \geqslant \lambda f$.
a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.
b) Montrer que f a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.
c) Trouver des fonctions vérifiant ces conditions.

Exercice 725 *X 2010* Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant |P(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 726 *X 2017*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 727 *Centrale 2008, X 2012* Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!$

Exercice 728 *Ens 2023*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $f^{(p)}(x) \neq 0$. Montrer que, pour tout $\ell \in [\![0\,;p]\!]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels $a < b$ tels que $\max(|x-a|, |x-b|) \leqslant \varepsilon$ et, pour tout $y \in]\,a\,;b\,[$, on a $f^{(\ell)}(y) \neq 0$.

Exercice 729 *Ens 2023*

a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \cos(2\pi nt) f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. b) Montrer que cela reste vrai si f est supposée lipschitzienne sur $[0,1]$.

Exercice 730 *Théorème de Darboux*[3]
Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' atteint toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
(☛ introduire les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$).

Exercice 731 *Mines 2023*
Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = a$. On suppose que $\forall x \in [0,b],\ f'(x) \geqslant f^3(x)$. Montrer que $b \leqslant \dfrac{1}{2a^2}$.

Exercice 732 *X 2022*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On suppose que $f^{(n)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim_{x\to+\infty} \sup\limits_{y\in[x-1,x+1]} \dfrac{f^{(n)}(y)}{f^{(n)}(x)} = 1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \underset{x\to+\infty}{\sim} f^{(n)}(x)$.

Exercice 733 *X 2009*

1. Soit $a \in [0, 1/e]$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = af(x+1)$.
2. Si $a = 1/e$, trouver deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant $(*)$.

Exercice 734 *X 2011*
Soit $f \in \mathcal{C}^3([-1,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que : pour tout $x \in [-\alpha, \beta]$ il existe un unique $y \in [-\alpha, \beta]$ tel que : $f(x) = f(y)$ et $xy \leqslant 0$.
b) Si $x \in [-\alpha, \beta]$, on note $\varphi(x)$ l'unique $y \neq x$ tel que $f(x) = f(y)$. Étudier la continuité et la dérivabilité de φ. Déterminer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Exercice 735 *X 2013* Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $f(x) = o(|x|^{p-1})$ quand $x \to \pm\infty$. Montrer que $f^{(p)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 736 *Ens 2007* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ paire. Etablir l'existence de $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x^2)$. Comment peut-on améliorer le résultat si l'on remplace l'hypothèse $\mathcal{C}^2$ par $\mathcal{C}^{2n}$?

---

3. Gaston Darboux : 1842 Nîmes - 1917 Paris : mathématicien français : Il soutient en 1866 sa thèse de doctorat sur les surfaces orthogonales. Il enseigne ensuite aux lycées Saint-Louis et Louis-le-Grand avant en 1872 de devenir maître de conférences à l'Ecole Normale Supérieure. En 1880, il succède à Chasles (avec lequel il sera en étroite relation) à la chaire de Géométrie Supérieure de la Sorbonne. Il devient en 1900 secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Il est auteur de nombreux articles sur l'approximation des fonctions et sur les fonctions discontinues, qu'il étudiera sans discontinuer tout au long de la vie.

Exercice 737 *X 2022*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable à droite en tout point.
On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_d'(x) \geqslant 0$. Montrer que f est croissante.

Exercice 738 *ENS 2009 et X 2018*
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.
On suppose que $f'(x)/f(x) \sim \alpha/x$ quand $x \to +\infty$. Déterminer la limite de $f(\beta x)/f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 739 *X 2008* Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$.
Montrer qu'il existe $M > 0$, que l'on déterminera, tel que : $\forall f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 f \leqslant M \sup_{[0,1]} |f''|$.

Exercice 740 *X 2023*
Soit $g \in \mathcal{C}^3([0,2], \mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g(2) = 0$. a) Montrer : $\forall x \in [0,2]$, $\exists c \in [0,2]$, $g(x) = \dfrac{1}{6} x(x-1)(x-2) g^{(3)}(c)$.
b) Montrer que $\displaystyle\int_0^2 |g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12} \|g^{(3)}\|_\infty$.
c) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{24}\left[\sup\left(g^{(3)}\right) - \inf\left(g^{(3)}\right)\right]$.

Exercice 741 *Mines 2023*
Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f$.
a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. L'application φ est-elle injective ? Surjective ?
b) Déterminer le noyau de φ.

Exercice 742 *Ens 2022*
Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$ est un multiple entier de 2π.

Exercice 743 *Mines 2017*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $\displaystyle\int_x^a e^{t^2} dt = 1$; on note ce réel $a(x)$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto a(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 744 *X 2013* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ tq $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,f(x)dx = 1$. Montrer $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant 4$.

Exercice 745 *Ens MP 1974* Montrer : $\exists C \in \mathbb{R}^+$ tq : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\left|\int_a^b e^{i\lambda t^2} dt\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$.

Exercice 746 *X 2015 et 2017*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que $f(x) \displaystyle\int_0^x f^2(t)dt \to \alpha$ quand $x \to +\infty$.

a) Montrer que f a une limite ℓ en $+\infty$.
b) Donner un exemple de f vérifiant la propriété de l'énoncé
b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 747 *X 2023*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^{+*})$.

On pose $m = \inf\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}\cdot$ Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm} \left(\int_a^b fg\right)^2$.

Exercice 748 *Centrale 2017*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ qui ne s'annule pas et telle que $f(0) = f(2\pi)$. On pose : $\alpha(f) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$

a) Si $z_0 \in \mathbb{C}^*$, résoudre $e^z = z_0$.
b) En introduisant la fonction $g : x \mapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt\right)$, montrer que $\alpha(f) \in \mathbf{Z}$.
c) Calculer $\alpha(f)$ lorsque f est à valeurs réelles.
d) Calculer $\alpha(f)$ lorsque f est la fonction $x \mapsto \cos(nx) + i \sin(nx)$.
e) Interprétation géométrique de α ?

Exercice 749 *Centrale 2006*

Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x |\sin t| \, \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^x \frac{1 + \sin^2 t}{\cos(2t) + 2} \mathrm{d}t$.

Exercice 750 *X 2007 et 2011* Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

On pose $u_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $v_n = n\left(u_n - \displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 751 *Ens 2012 et X 2014*

Soient $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que g est 1-périodique. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(nt) dt$.

Exercice 752 *X 2012*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{f(k/n)}{n}\right)$?

Exercice 753 *Ens 2019* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

On pose $f^* : x \in \mathbb{R} \mapsto \sup\limits_{t>0} \left| \dfrac{1}{2t} \displaystyle\int_{x-t}^{x+t} f(u) \mathrm{d}u \right|$.

a) Justifier la définition de f^*. Montrer que f^* est bornée.
b) Montrer que f^* est continue.

Exercice 754 *Mines 2010 et 2011*

1. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivables en 0 telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$.
2. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x+2y}^{y+2x} f(t)dt$.

Exercice 755 *X 2013* Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = \displaystyle\int_0^x \left(f^2 + f'^2\right) + 2024$.

Exercice 756 *X 2014*

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que :$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^1 f(y)e^{-x-y-1}dy$.

Exercice 757 *X 2009* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^{2n+1} + f(x) - x = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de x.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle admet une fonction réciproque g dont on donnera l'expression.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$. Interpréter géométriquement cette relation.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ en fonction de x, $f(x)$ et n.

Exercice 758 *X 2013 et 2016* Soit $f : x \in [e, +\infty[\mapsto x/(\ln x)$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur lui-même.
b) Montrer que $f^{-1}(x) \sim x \ln x$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 759 Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ qui à tout $x \in [0,1]$ associe le réel obtenue en permutant les deux premières décimales du développement décimal illimité de x.

Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 760 *ENS 2009 et Centrale 2018*

Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $g \in E$ associe $\Phi(g) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)dt$. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ et ne stabilise aucun sous-espace de dimension finie non nul de E.

Exercice 761 *Mines 2022* Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in [0,1]$. On pose $F(0) = f(0)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F^2(t)\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 762 *X 2012, 2016 et 2017, Centrale 2022* Soit $a < b$ réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$ et $0 \leqslant f' \leqslant 1$.
a) Montrer que $f(x)^2 \leqslant 2 \displaystyle\int_a^x f$ pour tout $x \in [a, b]$.
b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^3 \leqslant \left(\int_a^b f\right)^2$. étudier les cas d'égalité.

Exercice 763 *Ens 2021*
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Si $\sigma : x_1 = a < x_2 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision du segment $[a, b]$ on pose $V(f, \sigma) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$.
Soit $V(f) = \sup_\sigma V(f, \sigma) \in \overline{\mathbb{R}}$.
a) Les conditions suivantes sont-elles suffisantes pour que $V(f) < +\infty$?
(i) C_1 : f est lipschitzienne. (ii) C_2 : f est de classe C^1.
(iii) C_3 : f est monotone. (iv) C_4 : f est continue.
b) Montrer que $V(f) < +\infty$ si et seulement si f est différence de deux fonctions croissantes.

Exercice 764 *X 2022*
Montrer que, pour tout x réel, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Exercice 765 *Ens 2022* Soient a et b deux réels positifs.
a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \leqslant a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant a + b \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a\, e^{bn}$.
b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant a + b \displaystyle\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) \leqslant a\, e^{bt}$.

Exercice 766 *Ens 2005, X 2012, Mines 2022*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 767 *X 2012* Déterminer $\inf \left\{ \displaystyle\int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right)\ ;\ f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 1 \right\}$.

Exercice 768 *Mines 2016*
Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{a/b} e^x P_n(x) dx$.
a) Montrer que $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(a/b)$ sont dans $\mathbb{Z}$.
c) On suppose que $e^{a/b} = p/q$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que qI_n appartient à $\mathbb{Z}^*$ pour tout n.
d) Montrer que $\ln(2)$ est irrationnel.

Exercice 769  *Ens 2019* Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On suppose que, pour toute suite réelle (a_n), la convergence de $\sum a_n$ implique la convergence de $\sum f(a_n)$.
Montrer que $x\mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est bornée au voisinage de 0.

Exercice 770  *X 2023*
Soient a, b deux réels strictement positifs. Pour $x>0$, on pose $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.
a) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
b) On prolonge f en 0 en posant $f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$? de classe $\mathcal{C}^\infty$?
c) Soit $g: x\mapsto f(1/x)$. Trouver une fonction $x\mapsto h(x)$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(x)-h(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(x^n)$.

Exercice 771  *X 2023*
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
i) f est croissante,
ii) pour tout intervalle $I\subset\mathbb{R}$ ouvert, pour toute $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, pour tout $x_0\in I$, si $f-\varphi$ admet un minimum local en x_0, alors $\varphi'(x_0)\geqslant 0$.

Exercice 772  *X 2022*
Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
a) La fonction $x\mapsto\cos(x)+\cos(\alpha x)$ est-elle périodique ?
b) La fonction $x\mapsto\sin(x)+\sin(\alpha x)$ est-elle périodique ?
c) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, T-périodique (où $T>0$) et dont le maximum est atteint en un seul point de $[0,T[$. La fonction $x\mapsto f(x)+f(\alpha x)$ est-elle périodique ?

Exercice 773 *X 2023*
a) Soient $a\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des entiers c_j, avec $0\leqslant j\leqslant a-1$, tels que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!^a}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{a-1}c_jk^j}{k!^a}$$

b) Montrer que les c_j sont uniques (on traitera d'abord le cas $a=2$).

Exercice 774  *X 2022*
Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{h\to+\infty}\left[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right]=0$.
Montrer que f est affine.

Exercice 775  *X 2022*
Etudier les fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui vérifient la propriété suivante : pour tout x, il existe un entier $m\geqslant 1$ tel que $f^m(x)=x$, où f^m désigne la composée $f\circ\cdots\circ f$ (m fois).

Exercice 776  *X 2022*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. On note f^k l'itérée k-ième de f pour la composition.
a) Montrer que $x \mapsto f^k(x) - x$ possède un maximum M_k et un minimum m_k sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $-1 \leqslant f(y) - f(x) - (y - x) \leqslant 1$ pour tous réels x et y.
c) Montrer que $M_k - m_k \leqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 777  *Centrale 2014 et 2017* Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On considère $T : f \in E \mapsto T(f)$ où, pour tout $x > 0$, $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $T(f)(0) = f(0)$. Montrer que T est un endomorphisme et trouver ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 778  *X 2005* Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$. On définit l'endomorphisme T de E par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right)$$

1. Trouver une expression simple de T^n.
2. Déterminer, s'il existe, le sous-espace propre de T associé à la valeur propre 1.
3. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| > 1$. Déterminer, s'il existe, le sous-espace propre de T associé à a.
4. Déterminer, s'il existe, le sous-espace propre de T associé à la valeur propre $\dfrac{1}{2}$.
