PC $\star_2$

Feuille d'exos n° 9 :

121 exercices euclidiens [1] et préhilbertiens [2] réels.

« Οπερ εδει δειξαι », Ευκλειδες, Στοιχεια : Βιβλιο 1, προτασεις 4. [3]

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n) \in D_n(\mathbb{R})$, $(X, Y) \longmapsto {}^tXDY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ ssi $d_i > 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.	☐	☐
2	$\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.	☐	☐
3	Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vert\mathrm{tr}(A)\vert \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$ avec égalité ssi $A = \lambda I_n$.	☐	☐
4	Soient F et G deux sev, F et G supplémentaires $\Longleftrightarrow F \perp G$.	☐	☐
5	Soit F un sev de E euclidien, $F \oplus F^\perp = E$.	☐	☐
6	Soit F un sev de E préhilbertien réel, $F \oplus F^\perp = E$.	☐	☐
7	Soit F un sev de E euclidien, $F = (F^\perp)^\perp$.	☐	☐
8	Soit F un sev de E préhilbertien réel, $F = (F^\perp)^\perp$.	☐	☐
9	Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \det(A) = \pm 1$.	☐	☐
10	Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \{1, -1\}$.	☐	☐
11	Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable.	☐	☐
12	Un endomorphisme u de E euclidien est antisymétrique si et seulement $(u(x)\vert x) = 0$ pour tout $x \in E$.	☐	☐
13	Une symétrie est un endomorphisme symétrique.	☐	☐
14	Un projecteur orthogonal appartient au groupe orthogonal.	☐	☐
15	La matrice d'un endomorphisme symétrique est symétrique.	☐	☐
16	f symétrique $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \perp \mathrm{Ker}\, f$.	☐	☐

1. Euclide Ευκλειδες : -325, -265 : Alexandrie. Mathématicien grec. On ne sait pas grand chose de la vie de celui qui fut l'un des premiers mathématiciens de l'histoire, et sans lequel les mathématiques enseignées au collège ne seraient pas ce qu'elles sont. Son oeuvre principal : *Les Eléments* constitue la base de l'enseignement des mathématiques. On sait cependant avec certitude qu'Euclide ignorait à peu près tout des espaces euclidiens (notions qui datent des XVIe et XVIIe siècles)
2. David Hilbert (et non pas Préhilbert) :1862 Königsberg - 1943 Göttingen mathématicien allemand. Considéré comme un des plus grands mathématiciens du XXe siècle. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle. On retient de lui notamment sa liste des 23 problèmes qu'il présenta en 1900 au congrès international de mathématiques à Paris. Ces problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec ont marqué le cours des mathématiques du XXe siècle, cinq ne sont pas résolus à ce jour et ont été en partie, notamment l'hypothèse de Riemann, repris dans la liste des 7 problèmes du millénaire établie en 2000, et dont la résolution de chacun d'entre eux est dotée d'un prix d'un million de dollars...
3. « Quod erat demonstrandum », Euclidis, Elementorum, Liber 1, Prop. IV.

Les basiques

Exercice 526 *Mines 2022*
Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_4)$ la base orthonormée canonique de E. On note G le sous-espace vectoriel de E défini par le système suivant : $(x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0)$.
a) Trouver la matrice de la projection orthogonale sur G dans la base canonique $\mathcal{B}$.
b) On pose $v = (a\ b\ c\ d)^T$. Déterminer la distance de v à G.

Exercice 527 *Mines 2019* Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
b) Calculer A^6.
c) Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que A soit la matrice dans la base canonique d'une rotation.

Exercice 528 *Mines 2015, X 2019 et 2021* Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer que $\displaystyle\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,i}$.

Exercice 529 *Mines 2015*
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont > 0.

Exercice 530 *Mines 2022*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui définit un produit scalaire sur E. Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.
b) Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
c) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \ldots, P_n)$ de E telle que : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k$
$\mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^k)$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.
d) Montrer que P_k a la même la parité de k.
e) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

Exercice 531 *Centrale 2014, Mines et X 2021* Soit E un espace euclidien de dimension n et soient $v_1, \ldots, v_n$ dans E tels que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle^2$. Que dire de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$?

Exercice 532 *Centrale 2010, 2012 et 2015, Mines 2016, 2019 et 2022*

1. Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
   On suppose cette condition réalisée et on note $\langle\ ,\ \rangle$ ce produit scalaire.
2. Donner une base orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$.

3. Soit $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Déterminer la distance de X^n à $\mathcal{F}$.

Exercice 533 *Mines 2017*
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$.
Pour $A = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i$ et $B = \sum_{i=0}^{3} b_i X^i$, on pose $\langle A, B \rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$.
Calculer la projection orthogonale de X sur H. En déduire la distance de X à H.

Exercice 534 *Mines 2019 et 2021, Centrale 2021*
Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
c) Déterminer le projeté orthogonal de X sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
d) Déterminer la distance de X à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 535 *Mines 2011 et 2012 et 2019*
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M{}^tMM = I_n$.

Exercice 536 *Mines 2022* Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et v un vecteur de E non nul. On note $f : E \to E$ la fonction $x \mapsto x + \lambda \langle x, v \rangle v$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que f soit une isométrie.

Exercice 537 *Centrale 2018* Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal. Est-il symétrique ?
b) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. On suppose que $p \circ q = 0$. Montrer que $q \circ p = 0$.

Exercice 538 *X 2017, Mines 2021*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $n(A) = \mathrm{tr}(A\,{}^tA)$.
a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $n(AB) \leqslant n(A)\,n(B)$.
b) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ le spectre ordonné de A. Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2\,n(A)$.

Exercice 539 *Mines 2019*
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et A une partie de E.
On pose $B = \{\langle x, y \rangle,\ (x, y) \in A^2\}$. Montrer que A est finie si et seulement si B est finie.

Exercice 540 *X 2020*
Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, H un hyperplan de E. On cherche à déterminer les $s \in \mathcal{O}(E)$ telles que $\mathrm{Ker}(s - id) = H$.
a) Déterminer les s vérifiant cette condition en se plaçant dans une base adaptée.
b) Montrer l'existence de $a \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.
c) Si s est solution, exprimer, pour $x \in E, s(x)$ à l'aide de a et de x.

Exercice 541 *Mines 2010 et 2013*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Montrer : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} {a_{i,j}}^2 = \sum_{k=1}^{n} {\lambda_k}^2$.

Exercice 542 *Mines 2022* Soient x et y deux vecteurs unitaires distincts d'un espace euclidien et soit $t \in]0,1[$. Montrer que $(1-t)x + ty$ n'est pas unitaire.

Exercice 543 *Centrale 2022* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = AA^T$.
a) Que dire si A est inversible ?
b) Montrer que $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A^T$ et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.
c) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} A \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} A$.
d) Montrer que A est symétrique.

Les incontournables

Exercice 544 *X 2022*
Soit A une matrice antisymétrique réelle. On cherche à montrer que le rang de A est pair.

1. Montrer que c'est le cas si A est inversible.
2. Montrer que $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont en somme directe.
3. Montrer que l'endomorphisme induit par A sur $\operatorname{Im} A$ est inversible.
4. Conclure.

Exercice 545 *Mines 2011, 2015, 2021 et 2022, X 2017* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.
a) Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.
b) Montrer que A est de rang pair.

Exercice 546 *Centrale 2001, X 2009, Mines 2014, 2015, 2019 et 2022*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$ et que $\displaystyle\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.
b) Montrer que $n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

Exercice 547 *X 2010 et 2014*
Soient $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $a_{i,j} = i(n-1) + j$.
Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 548 *X 2007, 2011, 2016 et 2021, Centrale 2012* On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.
Soient $(v_1,\dots,v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ tel que : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$, $i \neq j \Longrightarrow \langle v_i, v_j\rangle < 0$
(on dit que la famille $(v_1,\dots,v_p)$ est *obtusangle*).

1. Soient $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $x=\sum_{i=1}^{p}x_iv_i$ et $y=\sum_{i=1}^{p}|x_i|v_i$. Comparer $||x||$ et $||y||$.
2. Si $x=0$, montrer que les x_i sont tous nuls ou tous non nuls.
3. Montrer que $p-1$ vecteurs de $(v_1,\dots,v_p)$ forment une famille libre. En déduire que $p\leqslant n+1$.
4. Trouver dans $\mathbb{R}^2$ trois vecteurs unitaires (v_1,v_2,v_3) satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
5. Construire une famille de $n+1$ vecteurs $(v_1,\dots,v_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 549 

Déterminants de Gram[4] *- Centrale 2013 et 2019, Mines 2019*

Soit E un e.v. préhilbertien réel.
Soient $(u_1,\dots,u_n)$ n vecteurs de E. On note $Gram(u_1,\dots,u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i,j) est $(u_i|u_j)$ et on définit $G(u_1,\dots,u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. Montrer que si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée alors $G(u_1,\dots,u_n)=0$.
2. Montrer que si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre alors $G(u_1,\dots,u_n)>0$.
3. Soit F un s.e.v. de E de dimension p et soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F.

   Pour tout $x\in E$, montrer que $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{G(e_1,\dots,e_p,x)}{G(e_1,\dots,e_p)}}$

Exercice 550  *X 2009, Mines 2013, 2016, 2017, 2018 et 2019, Centrale 2014 et 2018*

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $A+I_n$ et $A-I_n$ sont inversibles. On pose $M=(A+I_n)^{-1}(I_n-A)$.
2. Montrer que M est dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que I_n+M est inversible.
4. Montrer que $A=(I_n+M)^{-1}(I_n-M)$.
5. Pour $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A)=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$. Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas la valeur propre -1.

Exercice 551  *X 2012, 2013, 2014 et 2018, Mines 2018, 2019 et 2022, Centrale 2022*

Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, $(e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de E et f un endomorphisme de E non nul tel que

$$\forall\,(x,y)\in E\ \ \langle x,y\rangle=0\Longrightarrow\langle f\,(x)\,,f\,(y)\rangle=0$$

a) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Montrer que $e_i+e_j\perp e_i-e_j$.
b) Montrer que $\|f\,(e_i)\|=\|f\,(e_j)\|$.
c) En déduire qu'il existe $\lambda>0$ tel que $\forall u\in E,\ \|f\,(u)\|=\lambda\,\|u\|$.
Exprimer alors f comme la composée de deux endomorphismes à préciser.

---

4. Jørgen Pedersen Gram : 1850 Nustrup - 1916 Copenhague, Danemark : après des études de mathématiques, Gram s'engage dans une compagnie d'assurance en 1875. A peu près à la même période, il commence à développer des modèles mathématiques de gestion forestière (il publiera quatre articles sur le sujet). En 1884, il fonde sa propre compagnie d'assurance. N'ayant jamais enseigné les mathématiques à l'université, ayant pratiqué les mathématiques essentiellement en amateur, Gram n'en a pas moins profondément influencé les mathématiques danoises. En 1884, il reçoit la médaille d'or de la Videnskabernes Society pour un article intitulé : investigations sur le nombre d'entiers premiers inférieurs à un entier donné.

Exercice 552 *Centrale 2008 et X 2016*
Soit A une matrice antisymétrique réelle et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
a) Montrer que les valeurs propres non nulles de A sont imaginaires pures.
b) Montrer que $\det(A+I_n) \geqslant 1$. c) En déduire que $\det(A+S) \geqslant \det S$.

Exercice 553 *Centrale 2009 et 2022, Mines 2011, X 2015, 2016 et 2019* Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (K, P) avec $K \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} > 0$ vérifiant $M = KT$.
2. En déduire l'inégalité d'Hadamard [5] : $|\det M| \leqslant \|C_1\| \dots \|C_n\|$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de M.
3. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si ${}^tMM$ est diagonale.
4. Interpréter géométriquement pour $n = 2$ et $n = 3$.
5. Montrer que $|\det M| \leqslant n^{\frac{n}{2}} \left(\max\limits_{i,j} |m_{i,j}| \right)^n$

Exercice 554 *X 1998, 2004, 2018, Mines 2006, Ens 2012* *Théorème de Courant-Fischer*
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$.
On note $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
On pose, pour $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\varphi(X) = \dfrac{(MX|X)}{(X|X)}$ et $W_k = \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_k)$.

1. Montrer que $\max\limits_{X \in W_k \backslash \{0\}} \varphi(X) = \lambda_k$.
2. Montrer que $\min\limits_{X \perp W_{k-1}, X \neq 0} \varphi(X) = \lambda_k$.
3. Calculer $\min\limits_{\dim W = k} \left(\max\limits_{X \in W \backslash \{0\}} \varphi(X) \right)$

Exercice 555 *Réduction des automorphismes orthogonaux* *X 2020*
Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que si G est un s.e.v. stable par f alors $G^\perp$ aussi.
2. Montrer que $u = f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E. En déduire l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ soit stable par f.
3. Montrer par récurrence sur la dimension de E que si f est un automorphisme orthogonal de E alors E est somme directe orthogonale de s.e.v. vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par f.
4. En déduire l'existence d'une BON $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\Delta = (1)$ ou $D = (-1)$ ou bien $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 556 *X 1998, 2004 et 2007 et 2020, Ens 2012*
Soient $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $B = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ extraite de A .
Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leqslant \mu_2$ les valeurs propres de B.
Montrer que : $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_3$.

5. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) : déjà rencontré à la feuille 5 avec les matrices à diagonale dominante et dans la feuille 8 avec les disques de Gershgorin.

Exercice 557 *X 1998, 2004 et 2007 et 2020, Ens 2012*

On considère $A = \left(\begin{array}{c|c} B & L^T \\ \hline L & \alpha \end{array}\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, avec $B \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$.

On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leqslant ... \leqslant \mu_{n-1}$ celles de B.

Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant ... \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$.

Exercice 558 *Centrale 2021* Soit E un espace euclidien.

a) Soit u un endomorphisme symétrique positif. Soit $x \in E$. Montrer que $\langle x, u(x)\rangle = 0$ si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}u$.

b) Soient a et b deux endomorphismes symétriques positifs.

(i) Montrer qu'il existe h symétrique positif tel que $h^2 = b$.

(ii) On pose $f = ab$ et $g = hah$. Montrer que g est diagonalisable.

(iii) En remarquant que $f = (ah)h$ montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont même dimension. Qu'en conclure sur f ?

Exercice 559 *Centrale 2012 et 2014, Mines 2015*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle.

a) On suppose u symétrique.

(i) Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

(ii) Montrer, par récurrence, qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.

b) On ne suppose plus u symétrique. Montrer que le résultat de a) (ii) est encore vrai.

Exercice 560 *Centrale 2012, Mines 2022*

a) On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A, $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A^T.

(i) Montrer : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$.

(ii) Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par v.

b) Déterminer les sous-espaces stables par $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 561 *X 2017, Mines 2019* Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\langle X, Y\rangle = X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Exercice 562 *Mines 2022* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note λ_1 la plus grande valeur propre de A. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. a) Montrer que $\forall X \in E,\ X^T A X \leqslant \lambda_1 X^T X$.

On suppose désormais que les coefficients de A situés en dehors de la diagonale sont positifs ou nuls.

b) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall X \in E,\ X^T A X \leqslant \overline{X}^T A \overline{X}$

c) Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1, il en va de même de $\overline{X}$.
d) En déduire que l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 est de dimension 1.

Les autres

Exercice 563 *Mines 2016, 2017 et 2021*

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

Déterminer les matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ S(P^{-1}AP) = S(A)$.

Exercice 564 *X 2020* Soient x et y deux vecteurs non nuls de E euclidien. Montrer que :

$$||x - y|| \geqslant \frac{1}{2} \max(||x||, ||y||) \left|\left| \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||} \right|\right|$$

Exercice 565 *Mines 2011 et 2022*

a) Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\| \ \|$ la norme associée.
b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\,\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{tr}(AA^T)}$.
c) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
d) Pour quelles matrices, a-t-on égalité dans l'inégalité de la question précédente ?

Exercice 566 *X 2012*

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique. Soit $v = {}^t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ de norme 1.
a) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v)$.
b) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v)^\perp$.

Exercice 567 *Centrale 1998, 2013 et 2018*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf\{\displaystyle\sum_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2,\ M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 568 *Ens 2012*

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $D : (u_n) \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \geqslant 0}$.
a) Montrer que D est un endomorphisme. Est-il surjectif ? injectif ?
b) Déterminer les vecteurs propres de D.
c) Soit F l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable. Montrer que F est stable par D.

On munit F du produit salaire donné par : $\forall (u_n)_{n \geqslant 0}, (v_n)_{n \geqslant 0} \in F,\ \langle (u_n), (v_n) \rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

d) Déterminer $H = \left\{ \dfrac{\langle u, D(u) \rangle}{\langle u, u \rangle},\ u \in F \setminus \{0\} \right\}$.

Exercice 569 *Centrale 2022*
Pour $(X,Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on pose : $\langle X,Y\rangle = \operatorname{tr}\left(X^TY\right)$.
a) Vérifier que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire dont on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Calculer $\inf\limits_{M\in E} \|A - M\|$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf\limits_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$ et $\inf\limits_{M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$.

Exercice 570 *X 2017 et 2019*
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(M) = p$.
a) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|Mx - y\| = \inf\limits_{x'\in\mathbb{R}^p} \|Mx' - y\|$.
b) Montrer que M^TM est inversible. En déduire une relation entre $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Ker} M^T$.

Exercice 571 *Centrale 2022*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne usuelle : $\|M\| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^TM)}$. On considère $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $(S,\Omega) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega S$.
b) Calculer $d(M, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{V\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|M - V\|$.
Ind. Montrer que, pour $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|MV\| = \|VM\| = \|M\|$.

Exercice 572 *Mines 2008 et 2010* Soient E un ev euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, 1-lipschitzienne.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - Id_E) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - Id_E)$.

Exercice 573 *Centrale 2010*

1. Soient $(E\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $\|\ \|$ la norme euclidienne, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
   Montrer : $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \|x_1 + \cdots + x_n\|^2$.
2. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, $\mathcal{B}$ une boule de rayon R de $\mathcal{E}$, $M_1, \ldots, M_n$ des points de $\mathcal{B}$.
   On pose $\alpha = \min\{M_iM_j,\ i \neq j\}$. Montrer : $\alpha \leqslant \sqrt{\dfrac{2n}{n-1}}R$.

Exercice 574 *Ens MP 1974* On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que la famille $(Q_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ définie par $Q_j(x) = \dfrac{d^j}{dx^j}x^j(1-x)^j$ est une base orthogonale.
2. Soit $F_{k,n}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient de x^k vaut 1.
   Montrer que $\inf\limits_{P\in F_{k,n}} \displaystyle\int_0^1 P(t)^2dt = \dfrac{1}{(2k+1)\dbinom{2k}{k}^2\dbinom{n+k+1}{2k+1}^2}$

Exercice 575 *Mines 2021* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $a, b \in E$.
Déterminer les bornes inférieure et supérieure de $f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{\langle x,a\rangle\,\langle x,b\rangle}{\langle x,x\rangle}$.

Exercice 576 *X 2012*
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et $A = \left(\displaystyle\int_a^b f_if_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Montrer que $\det A = 0$ si et seulement si la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Exercice 577 *Centrale 2018*
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
a) Soient (e_1, e_2) deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ et $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle x, e_1\rangle\, e_2 + \langle x, e_2\rangle\, e_1$. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.
b) Étudier la réciproque.

Exercice 578 *Mines 2022* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$ différente de la fonction nulle.
Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$.
a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
b) Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\langle P_m, P_n\rangle = \delta_{m,n}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est scindé à racines simples, les racines de P_n étant dans $]0, 1[$.

Exercice 579 *Mines 2014*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M^T M$ et $M^2 = -I_n$. Montrer que M est orthogonale.

Exercice 580 *Centrale 2011, Mines 2022*
On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$.
a) Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \langle A_n, P\rangle$.
b) Montrer que A_n possède n racines distinctes dans $]0, 1[$.
c) Calculer $A_n(0)$ en fonction de n.

Exercice 581 *Combinaison de formes linéaires*
Soient $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes.
Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f \supset \mathrm{Ker}\, f_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\, f_p$.

Exercice 582 *X 2015*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} ait ses coefficients diagonaux égaux ?

Exercice 583 *X 2009, Mines 2018* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. On pose $D = A + {}^tA$.
Montrer : $\mathrm{Ker}\, D = \mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Ker}\, {}^tA$ et $\mathrm{Im}\, D = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Im}\, {}^tA$.

Exercice 584 *X 2009* Soient E euclidien, F un s.e.v. de E, $v \in E \setminus F$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
Montrer qu'il existe un unique $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$ tel que : $u + \lambda v \in F^\perp$, $\langle u + \lambda v, v\rangle \geqslant 0$ et $\|u + \lambda v\| = \alpha$.

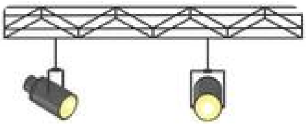
Exercice 585 *Mines 2022* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, pour toute matrice orthogonale P, $P^{-1}AP$ est de diagonale nulle.

Exercice 586  *X 2020*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur de $\mathbb{R}^n$. On note P sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que le projecteur p est orthogonal si et seulement si la matrice P est symétrique.
b) Soient H et K deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, et soit h (resp. k) la projection orthogonale sur H (resp. K). Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $h-k$ soit inversible.
c) Sous cette condition, préciser l'inverse de $h-k$.

Exercice 587  *Centrale 2012, Mines 2017*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E, $H = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Im} q$.
a) On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est valeur propre de $p \circ q$ et que x est un vecteur propre associé. Montrer que $x \in H$, que $q(x) - \lambda x$ appartient à $H^{\perp}$.
b) Montrer que toutes les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans $[0, 1]$.
c) On suppose que p et q commutent.
(i) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.
(ii) Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
(iii) Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.



Exercice 588 *X et Centrale 2011, X 2018*

Soient E euclidien, p et q, 2 projecteurs orthogonaux.
a) Montrer que $u = p \circ q \circ p$ est symétrique.
b) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0, 1]$.
c) Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ et de $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$
d) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 589  *Centrale 2011* Soient E et F deux espaces euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
a) Si $y \in F$, montrer qu'il existe $x \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ et $y' \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ tels que $y = f(x) + y'$.
b) Montrer que le couple (x, y') de a) est unique. On note g l'application qui à $y \in F$ associe le $x \in E$ du couple (x, y').
c) Montrer que g est linéaire. Déterminer l'image et le noyau de g.
d) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs que l'on caractérisera.
e) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ et que la matrice de f dans les bases canoniques (orthonormées) est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques.

Exercice 590  *Mines 2019*

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On suppose que $A^T A = B^T B$. Soit f (resp. g) l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ canoniquement associée à A (resp. B). On munit $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique.
a) Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$.
b) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^q$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle$.
c) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = UB$.

Exercice 591 *Mines 2022*
a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(MM^T) \geqslant 0$. Si $p < n$, montrer que $\det(MM^T) = 0$.
b) Soient X un ensemble fini et $A_1, \dots, A_n$ des parties de X. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$ le cardinal de $A_i \cap A_j$. Montrer que le déterminant de la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ est positif.

Exercice 592 *Mines 2011 et 2013* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de A est égal au nombre de valeurs propres non nulles de $A^T A$ (comptées avec multiplicités).

Exercice 593 *Mines 2011* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Montrer que M est symétrique.

Exercice 594 *Ens 2021*
Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.
a) Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E. On suppose que u stabilise F. Montrer que u stabilise $F^\perp$.
b) Soient $u_1, u_2, \dots, u_k$ des endomorphismes symétriques de E, qui commutent. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes diagonales.

Exercice 595 *X 2016, Mines 2022* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on suppose A inversible et semblable à A^{-1}. Montrer que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant n$ et qu'il y a égalité ssi A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 596 *X 2017, Mines 2019*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\chi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. Montrer que A est diagonale.

Exercice 597 *X 2020*

Soient U et V deux matrices orthogonales. On considère $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M = UJ_rV$.

a) Préciser les dimensions de U, V et M.
b) Calculer $\operatorname{rg}(M)$ et expliciter $\operatorname{Im}(M)$.

Exercice 598 *X 2019* Déterminer les $M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telles que : $\forall O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $MOM^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 599 *Ens 2018*
Soit $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Quel est le nombre maximum de coefficients nuls que peut avoir A ?
Déterminer tous les entiers r pour lesquels il existe effectivement $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ayant r coefficients nuls.

Exercice 600 *Mines 2018* Déterminer le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 601 *Mines 2015*
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Montrer que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ est égal à la multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique.

Exercice 602 *X 2021*
Soient $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_3\}$, $B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que $AB = BA$ si et seulement si $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}(A - (\det A) I_3)$.

Exercice 603 *Mines 2022* Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
On suppose : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{tr}(B^{2k}) = 2n$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 604 *X 2020*
Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $r \in SO(E)$.
a) Montrer que r admet au plus deux valeurs propres réelles.
b) On suppose n impair. Montrer que 1 est valeur propre.
c) On suppose $n = 2$ et qu'il existe $s \in O(E) \backslash SO(E)$ telle que $r \circ s = s \circ r$. Montrer que $r = Id$.
d) On suppose $n = 3$. Déterminer les rotations r telles qu'il existe $s \in O(E) \backslash SO(E)$ telle que $r \circ s = s \circ r$.

Exercice 605 *Mines 2016* Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ positive telle que $T^2 = S$.
b) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
c) Montrer qu'il existe existe un unique couple (Ω, U) tel que $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S = \Omega U$.

Exercice 606 *X 2019*
Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On suppose que $M = U \Omega V^T$ où U et V sont deux matrices orthogonales et Ω une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les $\Omega_{i,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.
a) Préciser la taille des matrices U, V et Ω.
b) Calculer $M^T M$.
c) Déterminer le rang de M et l'image de M.

Exercice 607 *X 2020*
Soient $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A^2 & A^3 & A^4 \\ A^2 & A & A^4 & A^3 \\ A^3 & A^4 & A & A^2 \\ A^4 & A^3 & A^2 & A \end{pmatrix}$$

Déterminer le spectre de B. Donner une base de vecteurs propres.

Exercice 608 *X 2014, 2020, Mines 2022 pour la question a)*
Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.
a) Déterminer la dimension maximale de V .
On suppose désormais $\dim V = 3$.
b) Montrer que I_2 appartient à V .
c) Montrer qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}VQ$ contiennent $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
d) Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}VP = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 609 *Ens 2019, X 2014 et 2020*
Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $I_2 \in V$.
b) Donner un exemple de tel hyperplan V.
c) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}VP$ contienne toutes les matrices diagonales.
d) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}VQ = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 610 *Mines 2013*
a) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $a_{1,1}$ appartient au spectre de A. Que peut-on dire de A ?
b) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $a = a_{1,1}$ est valeur propre de A, que a est la plus petite valeur propre de A et qu'elle est simple. Montrer que la première ligne de A est $(a \; 0 \; \cdots \; 0)$

Exercice 611 *X 2012* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant une valeur propre de multiplicité $\geqslant 2$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x)$ est liée.

Exercice 612 La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable avec $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 613 *Mines 2011, 2013 et 2019*
Montrer que l'application $M \mapsto M^3$ est une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Exercice 614 *X 2011* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$?

Exercice 615 *Ens 2013, Mines 2021*
a) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit antisymétrique.
b) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P(O)$ soit orthogonale.

Exercice 616 *X 2014 et 2015*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Trouver l'image de l'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T M X$.

Exercice 617 *X 2007*
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (Mx|x)$.

1. Déterminer $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\Phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 618 *Mines 2000* Dans un espace euclidien de dimension n, prouver l'existence d'une famille de vecteur unitaires : $(u_1, \ldots, u_n)$ tels que : $\|u_i - u_j\| = 1$ si $i \neq j$. Montrer qu'elle est unique à isométrie près.

Exercice 619 *X 2007 et 2011* Soient $k \in \mathbb{R}$ avec $k > 1$, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $n \geqslant 2$ et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall i$, $\|v_i\| = 1$ et $\forall i \neq j$, $\langle v_i, v_j \rangle \leqslant -1/k$. Montrer que $k + 1 \geqslant n$.

Exercice 620 *Ens 2018*
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \{-1, 1\}^N$. On note E l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.
a) Déterminer la dimension de E et en donner une base.
Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{2^N} \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)\, g(\omega)$.
b) Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E. Donner une base orthonormée de E.
Si I est une partie de $\{1, \ldots, N\}$, on pose, pour $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$, $f_I(\omega) = \displaystyle\prod_{i \in I} \omega_i$.
c) Montrer que les f_I, pour $I \in \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$, forment une base orthonormée de E.

Exercice 621 *Mines 2014*
Soient $(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $m_{i,n} = m_{n,i} = u_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $m_{i,i} = a_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls. On suppose $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$. Comparer les valeurs propres de A aux coefficients $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Exercice 622 *Centrale 2015*
Soit E un espace euclidien. Soient u et v dans $\mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer que :

$$\forall x \neq 0, \langle u(x), x \rangle < \langle v(x), x \rangle \Longrightarrow \mathrm{Sp}(v^{-1} \circ u) \in]0, 1[$$

Exercice 623 *Ens 2016*
Soient A et B dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \geqslant \mu_2$) le spectre ordonné de A (resp. B), $\nu_1 \geqslant \nu_2$ le spectre ordonné de $A + B$.
a) Montrer que $\nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2$.
b) Montrer que $\nu_1 \leqslant \lambda_1 + \mu_1$ et $\nu_2 \geqslant \lambda_2 + \mu_2$.
c) Montrer que $\nu_1 \geqslant \max\{\mu_2 + \lambda_1,\ \mu_1 + \lambda_2\}$ et $\nu_2 \leqslant \min\{\lambda_1 + \mu_2,\ \lambda_2 + \mu_1\}$.

Exercice 624 *Mines 2009 et 2022*
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $(X^T X)^2 \leqslant \left(X^T A X\right)\left(X^T A^{-1} X\right)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 625 *Mines 2022* Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $f_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \sum_{k=0}^{n} X^k \int_0^1 P(t)\, t^k \,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme.

b) Montrer que toute valeur propre de f_n est strictement positive.

c) Montrer que f_n admet une valeur propre. On note u_n la plus petite de ses valeurs propres.

d) Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 626 *X 2010, Mines 2022*

On définit le produit scalaire suivant dans $\mathbb{R}[X]$: $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q_n tel que : $\forall u \in \mathbb{R}, \sin((n+1)u) = Q_n(\cos u) \sin u$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

b) Montrer que les Q_n sont orthogonaux entre eux.

c) Déterminer $\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 627 *Centrale 2022*

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^{\pi} P(\cos v)\, Q(\cos v)\,\mathrm{d}v$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on admet qu'il existe un unique polynôme T_k de degré k tel que $\forall v \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos(v)) = \cos(kv)$ et dont le coefficient dominant vaut $\max\{1, 2^{k-1}\}$.

a) Montrer que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer la norme de T_k.

b) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $T_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

c) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\int_0^{\pi} \cos^k(v) \cos(nv)\mathrm{d}v$.

Exercice 628 *Centrale 2022* On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 (fg + f'g')$ constitue un produit scalaire sur E. On munit E de ce produit scalaire dans la suite.

b) Montrer que $V := \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W := \{f \in E, f'' = f\}$ sont des supplémentaires orthogonaux dans E.

c) On note $U := \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 1\}$. Déterminer $\inf_{f\in U} \int_0^1 (f^2 + (f')^2)$.

Exercice 629 *Centrale 2022*

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$. Pour $f \in E$, on pose $v(f) : x \mapsto \int_0^x f$.

a) Montrer que v constitue un endomorphisme de E.

b) Montrer qu'il existe un unique $v^\star \in \mathcal{L}(E)$, que l'on déterminera, tel que, pour tous f, g dans E, $\langle v(f), g\rangle = \langle f, v^\star(g)\rangle$.

Exercice 630 *Centrale 2022*

Soit $n \geqslant 2$. Soit $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Trouver une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = T^T T$.

b) Montrer que A est inversible.

c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

d) Soit α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A. Montrer que

$$\alpha \leqslant \left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/(n-1)} \leqslant \frac{n+1}{2} \leqslant \beta.$$

e) Calculer l'inverse de A.

Exercice 631 *Centrale 2022*

Soient $Q \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = Q^T Q$, et α, β des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients strictement positifs telles que $B = P^T D P$ et $A = P^T P$.

b) Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Exercice 632 *Mines 2021*

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n telles que $A^{2023} = B^{2023}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 633 *X 2019*

a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la sous-matrice $A_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que son déterminant D_k est strictement positif.

b) On suppose que $D_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) Soit $t \in \,]0,1[$. Montrer que $A(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $B = \left(\dfrac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

e) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On définit $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par $c_{i,j} = \displaystyle\prod_{l=1}^{q} \frac{1}{l + |i-j|}$. Montrer que $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 634 *X 2020* On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

a) Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||B|| = \sup\{||Bx||; x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\}$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que $||A|| \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

b) Soit $B : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ dérivable telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{tr}(B'(t)) \leqslant -\mathrm{tr}(B(t))$.

Montrer que $B(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 635 *Mines 2016*

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_n & & & \end{array}\right)$. Montrer que $\det(B) \leqslant 0$. À quelle condition a t-on $\det(B) = 0$?

Exercice 636 *Ens 2014*
a) Soit $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + C)^{1/n} \geqslant 1 + (\det C)^{1/n}$.
b) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$. Montrer : $\det\left(tA + (1-t)B\right)^{1/n} \geqslant t \det A^{1/n} + (1-t)\det B^{1/n}$.

Exercice 637 *X 2011, Centrale 2013 et 2019*
a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux positifs.
Montrer, si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que $\operatorname{tr}(DU) \leqslant \operatorname{tr}(D)$.
b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer, si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que $\operatorname{tr}(AU) \leqslant \operatorname{tr}(A)$.
c) Le résultat est-il toujours vrai si on suppose simplement $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 638 *X 2007, Ens 2011, Mines 2016* Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Si $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, montrer que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
b) En déduire que $\det(A) \leqslant \left(\dfrac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n$.
c) Montrer que les coefficients diagonaux de A sont > 0.
d) En déduire que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Exercice 639 *X 2019* Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonales telles que $A = {}^tPCP$ et $B = {}^tPDP$.

Exercice 640 *X 2019* Soit $M \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $M + I_n$ est inversible.
b) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|(M - I_n)(M + I_n)^{-1}X\| \leqslant \|X\|$.
c) Déterminer les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|(M - I_n)(M + I_n)^{-1}X\| = \|X\|$.

Exercice 641 *Centrale 2010*
a) Montrer que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive ssi il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P^TP$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable ssi il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^T = SAS^{-1}$.

Exercice 642 *Centrale 2010 et 2022*
a) On pose $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $A = VV^T$ où $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et n'a aucun coefficient nul
et $B = \left(\dfrac{1}{a_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que A et B sont dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
b) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ sans aucun coefficient nul.
On suppose aussi que $B = \left(\dfrac{1}{a_{i,j}}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
(i) Montrer que $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$.
(ii) Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A = VV^T$.

Exercice 643 *Mines 2019, X 2022, Mines 2022*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant \operatorname{rg}(A)\operatorname{tr}(A^2)$. Etudier les cas d'égalité.

Exercice 644 *Ens 2018*
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, on pose $A^* = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \forall y \in A,\ \langle x, y\rangle \leqslant 1\}$. Déterminer les $A \subset \mathbb{R}^n$ telles que $A^* = A$.

Exercice 645 *Mines 2022* Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$ est orthogonale, et déterminer dans ce cas les caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Exercice 646 *Mines 2022* Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E, et $(f_1, \ldots, f_n)$ une liste de vecteurs de E telle que $\|e_k - f_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E.

b) Le résultat précédent tient-il si les inégalités de l'hypothèse sont seulement larges ?
