



126 exercices euclidiens¹ et préhilbertiens² réels.

« Οπερ εδει δειξαι », Ευκλειδης, Στοιχεια : Βιβλιο 1, προτασεις 4.³

	Vrai / Faux	V	F
1	Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in D_n(\mathbb{R})$, $(X, Y) \mapsto {}^t X D Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ ssi $d_i > 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.	☐	☐
2	$\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.	☐	☐
3	Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $ \text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2}$ avec égalité ssi $A = \lambda I_n$.	☐	☐
4	Soient F et G deux sev, F et G supplémentaires $\iff F \perp G$.	☐	☐
5	Soit F un sev de E euclidien, $F \oplus F^\perp = E$.	☐	☐
6	Soit F un sev de E préhilbertien réel, $F \oplus F^\perp = E$.	☐	☐
7	Soit F un sev de E euclidien, $F = (F^\perp)^\perp$.	☐	☐
8	Soit F un sev de E préhilbertien réel, $F = (F^\perp)^\perp$.	☐	☐
9	Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \det(A) = \pm 1$.	☐	☐
10	Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \{1, -1\}$.	☐	☐
11	Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable.	☐	☐
12	Un endomorphisme u de E euclidien est antisymétrique si et seulement $(u(x) x) = 0$ pour tout $x \in E$.	☐	☐
13	Une symétrie est un endomorphisme symétrique.	☐	☐
14	Un projecteur orthogonal appartient au groupe orthogonal.	☐	☐
15	La matrice d'un endomorphisme symétrique est symétrique.	☐	☐
16	f symétrique $\iff \text{Im } f \perp \text{Ker } f$.	☐	☐

1. Euclide Ευκλειδης : -325, -265 : Alexandrie. Mathématicien grec. On ne sait pas grand chose de la vie de celui qui fut l'un des premiers mathématiciens de l'histoire, et sans lequel les mathématiques enseignées au collège ne seraient pas ce qu'elles sont. Son oeuvre principal : *Les Eléments* constitue la base de l'enseignement des mathématiques. On sait cependant avec certitude qu'Euclide ignorait à peu près tout des espaces euclidiens (notions qui datent des XVIe et XVIIe siècles)

2. David Hilbert (et non pas Préhilbert) : 1862 Königsberg - 1943 Göttingen mathématicien allemand. Considéré comme un des plus grands mathématiciens du XXe siècle. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle. On retient de lui notamment sa liste des 23 problèmes qu'il présenta en 1900 au congrès international de mathématiques à Paris. Ces problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec ont marqué le cours des mathématiques du XXe siècle, cinq ne sont pas résolus à ce jour et ont été en partie, notamment l'hypothèse de Riemann, repris dans la liste des 7 problèmes du millénaire établie en 2000, et dont la résolution de chacun d'entre eux est dotée d'un prix d'un million de dollars...

3. « Quod erat demonstrandum », Euclidis, Elementorum, Liber 1, Prop. IV.

LES BASIQUES

Exercice 532 Mines 2023

Soit $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $U^T U = 1$. Trouver les éléments propres de $M = I_n - 2UU^T$.

Exercice 533 Mines 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
 - Calculer A^6 .
 - Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que A soit la matrice dans la base canonique d'une rotation.
-

Exercice 534 Mines 2022 et 2023

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$, ce qui définit un produit scalaire sur E . Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

- Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
 - Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
 - Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de E telle que : pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.
 - Montrer que P_k a la même parité de k .
 - Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 .
-

Exercice 535 Centrale 2014 et 2023

Soient E euclidien et $e = (e_1, \dots, e_p)$ p vecteurs de E telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2$.

- Montrer que e est génératrice.
 - Montrer que $\|e_i\| \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
 - Montrer que e est une base orthonormée si et seulement si les e_i sont unitaires.
-

Exercice 536 Centrale 2010, 2012 et 2015, Mines 2016, 2019, 2022 et 2023

- Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k)$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

On suppose cette condition réalisée et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire.

- Donner une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Soit $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$. Déterminer la distance de X^n à $\mathcal{F}$.
-

Exercice 537 X 2013, Mines 2016

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\text{tr}(AA^T + BB^T) = \text{tr}(AB + A^T B^T)$. Montrer que $A = B^T$.

Exercice 538  Mines 2022 et 2023 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et v un vecteur de E non nul. On note $f : E \rightarrow E$ la fonction $x \mapsto x + \lambda \langle x, v \rangle v$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que f soit une isométrie.

Exercice 539  X 2009 et 2012
Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = \text{Ker } u$.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. Montrer que $u + v$ est inversible.

Exercice 540  X 2017, Mines 2021
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $n(A) = \text{tr}(A^t A)$.
a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $n(AB) \leq n(A)n(B)$.
b) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ le spectre ordonné de A . Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leq 2n(A)$.

Exercice 541  X 2020
Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, H un hyperplan de E . On cherche à déterminer les $s \in \mathcal{O}(E)$ telles que $\text{Ker}(s - \text{id}) = H$.
a) Déterminer les s vérifiant cette condition en se plaçant dans une base adaptée.
b) Montrer l'existence de $a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $H = \text{Vect}(a)^\perp$.
c) Si s est solution, exprimer, pour $x \in E$, $s(x)$ à l'aide de a et de x .

Exercice 542  X 2012 et 2014, Mines 2023 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, trouver $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que A et B soient semblables.

Exercice 543  X 2023
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et A^T commutent si et seulement si $AA^T A = A^2 A^T$.

Exercice 544  Mines 2023
Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
a) On suppose que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont orthogonaux. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
b) On suppose que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ ne sont pas orthogonaux. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$.
c) Si $p \neq 0$, montrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont orthogonaux si et seulement si $\sup_{x \neq 0} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} = 1$.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 545  Mines 2017
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A . Montrer que le plan (P) d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par u si et seulement si le vecteur $(a, b, c)^T$ est vecteur propre de A^T .

Exercice 546  Mines 2011 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un plan stable par f .

Exercice 547*X 2013 et 2015*

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe un espace de dimension 2 stable par f .

Exercice 548*X 2022*

Soit A une matrice antisymétrique réelle. On cherche à montrer que le rang de A est pair.

1. Montrer que c'est le cas si A est inversible.
 2. Montrer que $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ sont en somme directe.
 3. Montrer que l'endomorphisme induit par A sur $\text{Im } A$ est inversible.
 4. Conclure.
-

Exercice 549*Mines 2011, 2015, 2021 et 2022, X 2017*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- a) Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.
 - b) Montrer que A est de rang pair.
-

Exercice 550*Centrale 2001, X 2009, Mines 2014, 2015, 2019, 2022 et 2023*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$ et que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.
 - b) Montrer que $n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.
-

Exercice 551*X 2010 et 2014*

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{i,j} = i(n-1) + j$. Déterminer le rang de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 552*X 2007, 2011, 2016 et 2021, Centrale 2012*On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

Soient $(v_1, \dots, v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ tel que : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle < 0$ (on dit que la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est *obtusangle*).

1. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $x = \sum_{i=1}^p x_i v_i$ et $y = \sum_{i=1}^p |x_i| v_i$. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.
 2. Si $x = 0$, montrer que les x_i sont tous nuls ou tous non nuls.
 3. Montrer que $p-1$ vecteurs de $(v_1, \dots, v_p)$ forment une famille libre. En déduire que $p \leq n+1$.
 4. Trouver dans $\mathbb{R}^2$ trois vecteurs unitaires (v_1, v_2, v_3) satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
 5. Construire une famille de $n+1$ vecteurs $(v_1, \dots, v_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions de l'énoncé.
-

**Exercice 553***Déterminants de Gram⁴ - Centrale 2013 et 2019, Mines 2019*

Soit E un e.v. préhilbertien réel.

4. Jørgen Pedersen Gram : 1850 Nustrup - 1916 Copenhague, Danemark : après des études de mathématiques, Gram s'engage dans une compagnie d'assurance en 1875. A peu près à la même période, il commence à développer des modèles

Soient $(u_1, \dots, u_n)$ n vecteurs de E . On note $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i, j) est $(u_i | u_j)$ et on définit $G(u_1, \dots, u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.
2. Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre alors $G(u_1, \dots, u_n) > 0$.
3. Soit F un s.e.v. de E de dimension p et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

Pour tout $x \in E$, montrer que $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$

Exercice 554



X 2009, Mines 2013, 2016, 2017, 2018 et 2019, Centrale 2014 et 2018

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $A + I_n$ et $A - I_n$ sont inversibles. On pose $M = (A + I_n)^{-1}(I_n - A)$.
 2. Montrer que M est dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.
 3. Montrer que $I_n + M$ est inversible.
 4. Montrer que $A = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$.
 5. Pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas la valeur propre -1 .
-

Exercice 555



X 2012, 2013, 2014 et 2018, Mines 2018, 2019 et 2022, Centrale 2022

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et f un endomorphisme de E non nul tel que

$$\forall (x, y) \in E \quad \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

- a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$.
 - b) Montrer que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
 - c) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall u \in E, \|f(u)\| = \lambda \|u\|$.
- Exprimer alors f comme la composée de deux endomorphismes à préciser.
-

Exercice 556



Centrale 2008 et X 2016

Soit A une matrice antisymétrique réelle et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

- a) Montrer que les valeurs propres non nulles de A sont imaginaires pures.
 - b) Montrer que $\det(A + I_n) \geq 1$.
 - c) En déduire que $\det(A + S) \geq \det S$.
-

Exercice 557



Centrale 2009 et 2022, Mines 2011, X 2015, 2016 et 2019 Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (K, P) avec $K \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_{i,i} > 0$ vérifiant $M = KT$.
 2. En déduire l'inégalité d'Hadamard⁵ : $|\det M| \leq \|C_1\| \dots \|C_n\|$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de M .
 3. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si tMM est diagonale.
 4. Interpréter géométriquement pour $n = 2$ et $n = 3$.
-

mathématiques de gestion forestière (il publiera quatre articles sur le sujet). En 1884, il fonde sa propre compagnie d'assurance. N'ayant jamais enseigné les mathématiques à l'université, ayant pratiqué les mathématiques essentiellement en amateur, Gram n'en a pas moins profondément influencé les mathématiques danoises. En 1884, il reçoit la médaille d'or de la Videnskabernes Society pour un article intitulé : investigations sur le nombre d'entiers premiers inférieurs à un entier donné.

5. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) : déjà rencontré à la feuille 5 avec les matrices à diagonale dominante et dans la feuille 8 avec les disques de Gershgorin.

5. Montrer que $|\det M| \leq n^{\frac{n}{2}} \left(\max_{i,j} |m_{i,j}| \right)^n$

Exercice 558



X 1998, 2004, 2018, Mines 2006, Ens 2012 Théorème de Courant-Fischer

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On note $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.

On pose, pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\varphi(X) = \frac{(MX|X)}{(X|X)}$ et $W_k = \text{Vect}(V_1, \dots, V_k)$.

1. Montrer que $\max_{X \in W_k \setminus \{0\}} \varphi(X) = \lambda_k$.
2. Montrer que $\min_{X \perp W_{k-1}, X \neq 0} \varphi(X) = \lambda_k$.
3. Calculer $\min_{\dim W=k} \left(\max_{X \in W \setminus \{0\}} \varphi(X) \right)$

Exercice 559



X 1998, 2004 et 2007 et 2020, Ens 2012

Soient $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $B = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq 2}$ extraite de A .

Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \mu_2$ les valeurs propres de B .

Montrer que : $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3$.

Exercice 560



Réduction des automorphismes orthogonaux X 2020

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E .

1. Montrer que si G est un s.e.v. stable par f alors $G^\perp$ aussi.
2. Montrer que $u = f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E . En déduire l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $\text{Vect}(x, f(x))$ soit stable par f .
3. Montrer par récurrence sur la dimension de E que si f est un automorphisme orthogonal de E alors E est somme directe orthogonale de s.e.v. vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par f .
4. En déduire l'existence d'une BON $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\Delta = (1)$ ou $D = (-1)$ ou bien $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 561



X 1998, 2004 et 2007 et 2020, Ens 2012

On considère $A = \left(\begin{array}{c|c} B & L^T \\ \hline L & \alpha \end{array} \right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, avec $B \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$.

On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ celles de B .

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

Exercice 562



Centrale 2021

Soit E un espace euclidien.

a) Soit u un endomorphisme symétrique positif. Soit $x \in E$. Montrer que $\langle x, u(x) \rangle = 0$ si et seulement si $x \in \text{Ker } u$.

b) Soient a et b deux endomorphismes symétriques positifs.

(i) Montrer qu'il existe h symétrique positif tel que $h^2 = b$.

(ii) On pose $f = ab$ et $g = hah$. Montrer que g est diagonalisable.

(iii) En remarquant que $f = (ah)h$ montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont même dimension. Qu'en conclure sur f ?

Exercice 563



Centrale 2012 et 2014, Mines 2015

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle.

a) On suppose u symétrique.

(i) Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

(ii) Montrer, par récurrence, qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.

b) On ne suppose plus u symétrique. Montrer que le résultat de a) (ii) est encore vrai.

Exercice 564



Centrale 2012, Mines 2022

a) On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A , $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A^T .

(i) Montrer : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$.

(ii) Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par v .

b) Déterminer les sous-espaces stables par $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 565



Mines 2022

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, f et g deux endomorphismes de E tels que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$.

a) Exprimer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ en fonction de $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$.

b) Prouver que le sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par g .

Exercice 566



X 2017, Mines 2019 Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\langle X, Y \rangle = X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Exercice 567



X 2023

Sont $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 568



Mines 2023

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable.

a) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice triangulaire supérieure B telles que $A = \Omega B \Omega^T$.

b) On suppose que $AA^T = A^T A$. Montrer que A est diagonalisable.

c) La réciproque de b) est-elle vraie ?

Exercice 569



Centrale 2023

Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère deux isométries vectorielles directes $f, g \in \text{SO}(E)$.

a) Montrer que 1 est une valeur propre de f .

- b) Montrer qu'il existe une base (u, v, w) de E et un réel θ tels que $\text{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- c) On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$. Montrer que f et g commutent.
- d) On suppose que f et g commutent. Montrer qu'on a l'une des deux propriétés suivantes :
- i) il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$;
- ii) les isométries f et g sont des symétries orthogonales par rapport à deux droites orthogonales entre elles.

LES AUTRES

Exercice 570



Mines 2017

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour $A, B \in E$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.
- b) Déterminer les $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout A dans E , $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$.

Exercice 571



X 2020

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E euclidien. Montrer que :

$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2} \max(\|x\|, \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

Exercice 572



Mines 2011 et 2022

- a) Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.
- b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n \text{tr}(AA^T)}$.
- c) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- d) Pour quelles matrices, a-t-on égalité dans l'inégalité de la question précédente ?

Exercice 573



Mines 2014

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq 2$ et $p \geq 1$, $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

et $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall k \in \{1, \dots, p\}, Ax_k = 0\}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

Exercice 574



Ens 2023

Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) = 3, \text{tr}(A^2) = 5, \text{tr}(A^3) = 9$. Déterminer la borne inférieure de $\text{tr}(M^2)$ lorsque M décrit $\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) ; \text{tr}(AM) = 1 \text{ et } \text{tr}(A^2M) = 1\}$.

Exercice 575



Centrale 1998, 2013 et 2018

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf_{i,j} \left\{ \sum (a_{i,j} - m_{i,j})^2, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \right\}$.

Exercice 576



X 2017 et 2019

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p \leq n$, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(M) = p$.

- a) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|Mx - y\| = \inf_{x' \in \mathbb{R}^p} \|Mx' - y\|$.
- b) Montrer que $M^T M$ est inversible. En déduire une relation entre $\text{Im } M$ et $\text{Ker } M^T$.

Exercice 577 *X 2023*

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ non nulle, $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leurs normes euclidiennes canoniques. Considérons les assertions :

- (i) $\forall Z \in \mathbb{R}^n, \|AX - Y\| \leq \|AZ - Y\|$;
 - (i)' $A^T AX = A^T Y$;
 - (ii) X est de norme minimale pour la propriété (i) ;
 - (ii)' $X \perp \text{Ker } A^T A$.
- a) Montrer que (i) $\iff$ (i)'.
- b) On suppose (i) vérifié. Montrer qu'alors (ii) $\iff$ (ii)'.
- c) Montrer l'unicité de X vérifiant (i) et (ii). Notons BY ce vecteur.
- d) Montrer que B est linéaire. Montrer que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^m$, $\|BY\| \leq \frac{\|Y\|}{\sqrt{\lambda_1}}$ où λ_1 est la plus petite valeur propre non nulle de $A^T A$, et qu'il y a des cas d'égalité non triviaux.
-

Exercice 578 *X 1999* Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(1) = 1$.

On pose $f(P) = \int_0^1 P(t)^2 dt$. Caractériser $\{P \in \mathcal{E}, f(P) = \inf\{f(Q), Q \in \mathcal{E}\}\}$.

Exercice 579 *Ens MP 1974* On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que la famille $(Q_j)_{0 \leq j \leq n}$ définie par $Q_j(x) = \frac{d^j}{dx^j} x^j (1-x)^j$ est une base orthogonale.
2. Soit $F_{k,n}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient de x^k vaut 1.

Montrer que $\inf_{P \in F_{k,n}} \int_0^1 P(t)^2 dt = \frac{1}{(2k+1) \binom{2k}{k}^2 \binom{n+k+1}{2k+1}^2}$

Exercice 580 *Centrale 2023*

On pose $G(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec $x_i \in \mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique.

- a) Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $\det G > 0$.
 - b) Montrer que $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg } G$.
 - c) Montrer que $\text{Sp}(G) \subset \mathbb{R}^+$.
 - d) Soit $S \in S_p^+(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à n . Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ tel que $S = G(x_1, \dots, x_p)$.
-

Exercice 581 *Mines 2023*

Soit $(E; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(a, b) \in E^2$ une famille libre.

Soit $f : x \in E \mapsto \langle b, x \rangle a + \langle a, x \rangle b$.

- a) Montrer que f est un endomorphisme de E . Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
 - b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.
-

Exercice 582 *Mines 2022* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ différente de la fonction nulle.

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 f(t) P(t) Q(t) dt$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

- b) Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\langle P_m, P_n \rangle = \delta_{m,n}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
- c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est scindé à racines simples, les racines de P_n étant dans $]0, 1[$.
-

Exercice 583*Mines 2014*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M^T M$ et $M^2 = -I_n$. Montrer que M est orthogonale.

Exercice 584*Centrale 2023*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

a) Pour $a \in E$, on note $\varphi_a : x \mapsto \langle a, x \rangle$. Montrer que $\psi : a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de E vers $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^1 A(t)P(t) dt$.

Déterminer explicitement le polynôme A .

Exercice 585*Combinaison de formes linéaires*

Soient $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes.

Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\text{Ker } f \supset \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_p$.

Exercice 586*Mines 2017 et 2018 et 2019*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout sous-espace V de E , on ait $f(V^\perp) = f(V)^\perp$.

Exercice 587*X 2015*

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il $P \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} ait ses coefficients diagonaux égaux ?

Exercice 588*Mines 2012*

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

a) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

b) Montrer que A et B possèdent un hyperplan stable commun.

Exercice 589*X 2009, Mines 2018*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. On pose $D = A + {}^tA$. Montrer : $\text{Ker } D = \text{Ker } A \cap \text{Ker } {}^tA$ et $\text{Im } D = \text{Im } A \oplus \text{Im } {}^tA$.

Exercice 590*Mines 2023*

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

a) Montrer que, si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $(\text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}) \subset \{0\}$.

b) Montrer que $\Delta_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

c) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel inclus dans $\Delta_n(\mathbb{R})$?

Exercice 591*Mines 2022*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, pour toute matrice orthogonale P , $P^{-1}AP$ est de diagonale nulle.

Exercice 592

X 2020

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit p un projecteur. On note P la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Montrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont orthogonaux si et seulement si $P^T = P$.
 - Soient p et p' deux projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(p')$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
 - Montrer que $P - P'$ est inversible.
 - Soit Q la matrice dans la base canonique de la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Im}(p')$. Montrer que $(P - P')^{-1} = Q + Q^T - I_n$.
-

Exercice 593

X 2020

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

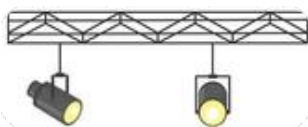
- Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur de $\mathbb{R}^n$. On note P sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que le projecteur p est orthogonal si et seulement si la matrice P est symétrique.
 - Soient H et K deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, et soit h (resp. k) la projection orthogonale sur H (resp. K). Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $h - k$ soit inversible.
 - Sous cette condition, préciser l'inverse de $h - k$.
-

Exercice 594

Centrale 2023

Soient E un espace euclidien, p, q deux projecteurs orthogonaux, $F = \text{Im}(p)$, $G = \text{Im}(q)$, $u = q \circ p \circ q$ et π le projecteur orthogonal sur $F \cap G$.

- Soit $x \in E$. Montrer que $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et traiter le cas d'égalité.
 - Montrer que u est autoadjoint positif.
 - Montrer que $\text{Sp}(u) \subset [0, 1]$.
 - Exprimer $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ en fonction de F et G .
 - Soit $x \in E$. Montrer que $u^k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \pi(x)$.
-

**Exercice 595**

X et Centrale 2011, X 2018

Soient E euclidien, p et q , 2 projecteurs orthogonaux.

- Montrer que $u = p \circ q \circ p$ est symétrique.
 - Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0, 1]$.
 - Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\text{Im } p + \text{Ker } q)$ et de $(\text{Ker } p \cap \text{Im } q)$.
 - Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
-

Exercice 596

X 2023

a) Est-il vrai que pour tout n et tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables ?

b) Montrer que AA^T et $A^T A$ sont semblables.

c) Soient F, G des sous-espaces de dimension m de $\mathbb{R}^n$, p_F et p_G les projections orthogonales respectivement sur F et G . Montrer que $\text{sp}(p_F \circ p_G) = \text{sp}(p_G \circ p_F) \subset [0, 1]$.

Exercice 597

Centrale 2011

Soient E et F deux espaces euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Si $y \in F$, montrer qu'il existe $x \in (\text{Ker } f)^\perp$ et $y' \in (\text{Im } f)^\perp$ tels que $y = f(x) + y'$.

b) Montrer que le couple (x, y') de a) est unique. On note g l'application qui à $y \in F$ associe le $x \in E$ du couple (x, y') .

- c) Montrer que g est linéaire. Déterminer l'image et le noyau de g .
d) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs que l'on caractérisera.
e) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ et que la matrice de f dans les bases canoniques (orthonormées) est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques.
-

Exercice 598



Mines 2019

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On suppose que $A^T A = B^T B$. Soit f (resp. g) l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ canoniquement associée à A (resp. B). On munit $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique.

- a) Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$.
b) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^q, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle$.
c) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = UB$.
-

Exercice 599



Mines 2022 et 2023

- a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(MM^T) \geq 0$. Si $p < n$, montrer que $\det(MM^T) = 0$.
b) Soient X un ensemble fini et $A_1, \dots, A_n$ des parties de X . Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $a_{i,j}$ le cardinal de $A_i \cap A_j$. Montrer que le déterminant de la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est positif.
-

Exercice 600



Centrale 2015 et 2023

- a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^t A = {}^t A A$. Montrer que $A = 0$. Ind. Poser $B = {}^t A A$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $A^n = 0$.
c) Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^3 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette application est-elle surjective ?
-

Exercice 601



X 2011

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leq p < n$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B = {}^t A A$.

- a) Montrer que B est inversible. b) Montrer que $AB^{-1} {}^t A$ est un projecteur de rang p .
-

Exercice 602



Mines 2011

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^t M = I_n$. Montrer que M est symétrique.

Exercice 603



X 2007

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}_n = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{tr } M = 1\}$.

- Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que si $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\|X\| = 1$, alors $(X|MX) \in [0, 1]$.
 - Montrer que $\mathcal{E}_n$ est convexe.
 - Montrer que $\mathcal{E}_n$ contient tous les projecteurs orthogonaux de rang 1.
 - On dit que $M \in \mathcal{E}_n$ est *extrémale* si : $\forall x \in [0, 1], \forall (A, B) \in \mathcal{E}_n^2, M = xA + (1-x)B \implies M = A = B$. Montrer que M est extrémale si et seulement si M est un projecteur de rang 1.
-

Exercice 604*X 2023*

Soit $f : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

- i) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AA^T) \geq 0$;
 - ii) $\exists B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \text{Tr}(AB)$;
 - iii) $\exists m \in \mathbb{N}, \exists (X_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^m, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \sum_{i=1}^m \text{Tr}(X_i^T A X_i)$.
-

Exercice 605*X 2016, Mines 2022 et 2023*

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on suppose A inversible et semblable à A^{-1} . Montrer que $\text{tr}(A^2) \geq n$ et qu'il y a égalité ssi A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 606*X 2017*

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A avec une multiplicité identique. Montrer que A est diagonale.

Exercice 607*Mines 2012*

Soit A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $2 \text{tr} AB \leq \text{tr} A^2 + \text{tr} B^2$.

Exercice 608*X 2019*

Déterminer les $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), M O M^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 609*X 2021*

Soient $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_3\}$, $B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que $AB = BA$ si et seulement si $\text{Ker } B = \text{Ker}(A - (\det A)I_3)$.

Exercice 610*Mines 2022*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{tr}(B^{2k}) = 2n$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 611*X 2023*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $n \geq 2$. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est somme d'un nombre fini d'isométries.

Exercice 612*X 2017*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,

- a) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^2$.
 - b) Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB + BA = 0$. Montrer que $B = 0$.
 - c) Trouver A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec A inversible et B non nulle telles que $AB + BA = 0$.
-

Exercice 613*Mines 2016*

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- a) Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ positive telle que $T^2 = S$.
 - b) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - c) Montrer qu'il existe un unique couple (Ω, U) tel que $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S = \Omega U$.
-

Exercice 614*Mines 2023*

Soit S une matrice symétrique réelle à diagonale nulle et D une matrice diagonale. Montrer que $S + D$ est semblable à S si et seulement si D est nulle.

Exercice 615*Centrale 2021*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On munit E du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall P \in E, f(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt$.

a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .

b) Justifier l'existence de réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et d'une base orthonormée $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E tels que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, f(P_k) = \lambda_k P_k$.

c) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.

d) Calculer $\text{tr}(f)$ et $\text{tr}(f^2)$.

Exercice 616*X 2014, 2020, Mines 2022 pour la question a)*

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

a) Déterminer la dimension maximale de V .

On suppose désormais $\dim V = 3$.

b) Montrer que I_2 appartient à V .

c) Montrer qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}VQ$ contiennent $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

d) Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}VP = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 617*Mines 2013*

a) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $a_{1,1}$ appartient au spectre de A . Que peut-on dire de A ?

b) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $a = a_{1,1}$ est valeur propre de A , que a est la plus petite valeur propre de A et qu'elle est simple. Montrer que la première ligne de A est $(a \ 0 \ \dots \ 0)$

Exercice 618*X 2011*

Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes.

Exercice 619

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable avec $A =$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 620*Mines 2011, 2013 et 2019*

Montrer que l'application $M \mapsto M^3$ est une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Exercice 621*X 2011*Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$?**Exercice 622***Mines 2018*Soient A_1 et A_2 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) A_1 et A_2 commutent, (ii) $A_1 A_2$ est symétrique,
 (iii) il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P A_1 P$ et ${}^t P A_2 P$ soient diagonales.

Exercice 623*Ens 2013, Mines 2021*

- a) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit antisymétrique.
 b) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P(O)$ soit orthogonale.

Exercice 624*X 2014 et 2015*Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Trouver l'image de l'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T M X$.**Exercice 625***X 2007*On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (Mx|x)$.

- Déterminer $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- Déterminer $\Phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 626*X 2007 et 2011*Soient $k \in \mathbb{R}$ avec $k > 1$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $n \geq 2$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall i, \|v_i\| = 1$ et $\forall i \neq j, \langle v_i, v_j \rangle \leq -1/k$. Montrer que $k + 1 \geq n$.**Exercice 627***X 2023*Soit n un entier ≥ 2 . Pour quelles valeurs du réel α existe-t-il $n + 1$ vecteurs unitaires $u_0, u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \alpha$?*Ind.* Considérer la matrice $A = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.**Exercice 628***Centrale 2015*Soit E un espace euclidien. Soient u et v dans $\mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer que :

$$\forall x \neq 0, \langle u(x), x \rangle < \langle v(x), x \rangle \implies \text{Sp}(v^{-1} \circ u) \in]0, 1[$$

Exercice 629*Centrale 2023*

- a) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

- b) On note $\alpha = \min \text{Sp}(S)$ et $\beta = \max \text{Sp}(S)$.

Montrer que $\text{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$.

- c) Soit $a \leq b$ tels que $\text{Sp}(S) \cap]a, b[= \emptyset$.

Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (SX - aX)^T (SX - bX) \geq 0$.

Exercice 630  Mines 2022 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note λ_1 la plus grande valeur propre de A . On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. a) Montrer que $\forall X \in E$, $X^T A X \leq \lambda_1 X^T X$.
On suppose désormais que les coefficients de A situés en dehors de la diagonale sont positifs ou nuls.

b) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\bar{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall X \in E$, $X^T A X \leq \bar{X}^T A \bar{X}$

c) Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 , il en va de même de $\bar{X}$.
d) En déduire que l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 est de dimension 1.

Exercice 631  Ens 2016

Soient A et B dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \geq \mu_2$) le spectre ordonné de A (resp. B), $\nu_1 \geq \nu_2$ le spectre ordonné de $A + B$.

- a) Montrer que $\nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2$.
b) Montrer que $\nu_1 \leq \lambda_1 + \mu_1$ et $\nu_2 \geq \lambda_2 + \mu_2$.
c) Montrer que $\nu_1 \geq \max\{\mu_2 + \lambda_1, \mu_1 + \lambda_2\}$ et $\nu_2 \leq \min\{\lambda_1 + \mu_2, \lambda_2 + \mu_1\}$.
-

Exercice 632  Mines 2009 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Calculer $\min \{ \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle ; x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle = 1 \}$.

Exercice 633  Centrale 2006, X 2023

Soit $A = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $]0, \pi[$ et que la plus petite valeur propre est inférieure ou égale à $\frac{1}{2n+1}$.

On pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t) dt + \int_0^\pi P(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta = 0$.

Exercice 634  X 2010, Mines 2022

On définit le produit scalaire suivant dans $\mathbb{R}[X]$: $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) \sqrt{1-t^2} dt$.

- a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q_n tel que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)u) = Q_n(\cos u) \sin u$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n .
b) Montrer que les Q_n sont orthogonaux entre eux.
c) Déterminer $\min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \sqrt{1-t^2} dt$.
-

Exercice 635  Centrale 2022 On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 (fg + f'g')$ constitue un produit scalaire sur E . On munit E de ce produit scalaire dans la suite.
b) Montrer que $V := \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W := \{f \in E, f'' = f\}$ sont des supplémentaires

orthogonaux dans E .

c) On note $U := \{f \in E, f(0) = f(1) = 1\}$. Déterminer $\inf_{f \in U} \int_0^1 (f^2 + (f')^2)$.

Exercice 636



Mines 2023

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive lorsque, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T A X \geq 0$.

- a) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
 - b) Montrer que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont symétriques positives, alors la matrice $C = (a_{i,j}b_{i,j})$ est symétrique positive.
-

Exercice 637



Ens 2023

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$, $\text{tr}((sI_2 + A)^{-1}) = \text{tr}((sI_2 + B)^{-1})$. Montrer que A et B sont semblables. Est-ce toujours vrai en dimension n ?

Exercice 638



Centrale 2022

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Trouver une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = T^T T$.
- b) Montrer que A est inversible.
- c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- d) Soit α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A . Montrer que

$$\alpha \leq \left(\frac{2}{n+1} \right)^{1/(n-1)} \leq \frac{n+1}{2} \leq \beta.$$

- e) Calculer l'inverse de A .
-

Exercice 639



Ens 2021

Soient A et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques positives telles que $B - A$ est positive. La matrice symétrique $B^2 - A^2$ est-elle nécessairement positive?

Exercice 640



Mines 2021

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n telles que $A^{2025} = B^{2025}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 641



X 2019

- a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la sous-matrice $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k} \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$ et que son déterminant D_k est strictement positif.
 - b) On suppose que $D_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - c) Soit $t \in]0, 1[$. Montrer que $A(t) = (t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - d) Montrer que $B = \left(\frac{1}{1 + |i-j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - e) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On définit $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par $c_{i,j} = \prod_{l=1}^q \frac{1}{l + |i-j|}$. Montrer que $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
-

Exercice 642  *X 2020* On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

a) Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|B\| = \sup\{\|Bx\|; x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A\| \leq \text{tr}(A)$.

b) Soit $B : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ dérivable telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \text{tr}(B'(t)) \leq -\text{tr}(B(t))$.

Montrer que $B(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 643  *X 2023*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique positive non nulle. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des réels $b_{i,k}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq r$, tels que $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^r b_{i,k} b_{j,k}$. Quel est la plus petite valeur possible de r ?

Exercice 644  *X 2011 et 2015* Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\det A \geq 0$.

b) Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$. Montrer que $\det(A_p) \geq 0$.

Exercice 645  *Mines 2011 et 2012*

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer : $\det(A+B) \geq \det A + \det B$.

Exercice 646  *X 2011, Centrale 2013 et 2019*

a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux positifs.

Montrer, si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que $\text{tr}(DU) \leq \text{tr}(D)$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer, si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$.

c) Le résultat est-il toujours vrai si on suppose simplement $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 647  *X 2007, Ens 2011, Mines 2016* Soit $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det A \leq \left(\frac{\text{tr } A}{n}\right)^n$ et $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Exercice 648  *X 2019* Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonales telles que $A = {}^tPCP$ et $B = {}^tPDP$.

Exercice 649  *X 2019* Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $M + I_n$ est inversible.

b) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|(M - I_n)(M + I_n)^{-1}X\| \leq \|X\|$.

c) Déterminer les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|(M - I_n)(M + I_n)^{-1}X\| = \|X\|$.

Exercice 650  *X 2007* Soient $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que : $\text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

Exercice 651  *Centrale 2010 et 2022*

a) On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $A = VV^T$ où $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et n'a aucun coefficient nul

et $B = \left(\frac{1}{a_{i,j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que A et B sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sans aucun coefficient nul.

On suppose aussi que $B = \left(\frac{1}{a_{i,j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$.

(ii) Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A = VV^T$.

Exercice 652 Mines 2023

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\text{tr}(M)^2 \leq \text{rg}(M) \text{tr}(M^2)$.

b) étudier le cas d'égalité et déterminer les matrices qui vérifient ce cas. Montrer que les matrices symétriques à valeurs propres strictement positives sont inversibles.

c) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle MX, X \rangle \langle M^{-1}Y, Y \rangle \geq \langle X, Y \rangle^2$.

Exercice 653 X 2000

Soit F un s.e.v. de dimension finie de E préhilbertien réel. Que dire de $x \in E$ tel que $\forall f \in F, (x|f) \leq (f|f)$?

Exercice 654 Mines 2016

a) Déterminer les $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes.

b) Déterminer les $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes.

c) Déterminer les matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont nilpotentes.

Exercice 655 Mines 2022 Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$ est

orthogonale, et déterminer dans ce cas les caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Exercice 656 X 2023

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

(i) $\alpha = 2$.

(ii) $\forall n \geq 1, \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in (S^2)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - c_i\|^\alpha$$

.

Exercice 657 Mines 2022 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E , et $(f_1, \dots, f_n)$ une liste de vecteurs de E telle que $\|e_k - f_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E .

b) Le résultat précédent tient-il si les inégalités de l'hypothèse sont seulement larges ?