PC$^{\star}_{2}$

Feuille n° 7 : rééducation des endomorphismes

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sep.	☐	☐
2	Deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique sont semblables.	☐	☐
3	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.	☐	☐
4	Si λ est valeur propre d'ordre k de A alors rang $(A - \lambda I_n) = n - k$.	☐	☐
5	Si rang $(A - \lambda I_n) = n - k$ alors λ est valeur propre d'ordre k de A.	☐	☐
6	Si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont racines de P.	☐	☐
7	Si P est un polynôme annulateur de A alors les racines de P sont valeurs propres de A.	☐	☐
8	Si P est un polynôme, A diagonalisable $\Longrightarrow P(A)$ diagonalisable.	☐	☐
9	Si P est un polynôme, $P(A)$ diagonalisable $\Longrightarrow A$ diagonalisable.	☐	☐
10	Si χ_A est scindé à racines simples alors A est diagonalisable.	☐	☐
11	Si A est diagonalisable alors χ_A est scindé à racines simples.	☐	☐
12	Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable.	☐	☐
13	Une matrice nilpotente est triangulaire (supérieure ou inférieure) stricte.	☐	☐
14	Deux matrices qui commutent sont codiagonalisables.	☐	☐
15	Deux matrices codiagonalisables commutent.	☐	☐
16	Deux matrices complexes qui commutent sont cotrigonalisables.	☐	☐
17	Deux matrices complexes cotrigonalisables commutent.	☐	☐
18	$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.	☐	☐
19	$\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $P(A) = 0$.	☐	☐

Jusqu'à 136 €xos de réduction [1] !!!

en tapant le code promo : PC $\overset{\star}{2}$

Les basiques

Exercice 396 *Mines 2019*
Deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)^2$ sont-elles semblables ?

Exercice 397 *Mines 2023*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - M + I_n = 0$.
a) La matrice M est-elle inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
b) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 398 *Mines 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = A^2$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2)$ et $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ sont des sev stables par A et que $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Ker}(A^2) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_3)$.
b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Exercice 399 *X 2016*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $E_A = \{X \in \mathbb{C}^n \; ; \; \exists \lambda \in \mathbb{C}, \; AX = \lambda X\}$.
a) On suppose $\det A = 0$. Montrer que E_A est un espace vectoriel si et seulement si A est nilpotente.
b) On suppose $\det A \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E_A soit un espace-vectoriel.

Exercice 400 *Mines 2011*
Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\, A = 11$ et $A(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$. Déterminer χ_A.

---

1. Hors carburant, billetterie, librairie, voyages. Non cumulable avec toute autre promotion en cours de validité. L'utilisation de ces bons de réduction est limité à 136 €xos par élève et entraîne l'acceptation pure et simple de tous les théorèmes du cours sans barguigner...

Exercice 401 *X 2023*
Déterminer les entier n tels qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$.
Ind. Commencer par $n \leqslant 3$.

Exercice 402 *Mines 2023*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$.
a) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
b) Calculer $\mathrm{Tr}(M)$, $\det(M)$ puis χ_M.
c) La matrice M^2 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Quelle est sa trace ?

Exercice 403 *X 2011, 2012 et 2014, Mines 2013, 2014 et 2023*
a) L'ensemble D des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.
c) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, contenu dans D . Montrer que $\dim(V) \leqslant n(n+1)/2$.

Exercice 404 **Not found**

Exercice 405
X 2009, Centrale 2015, Mines 2019 lemme d'Hadamard[2] et disques de Gerschgorin[3].
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
2. Soit, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, D_i le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer que λ est dans l'un des D_i.

Exercice 406 *X 2013*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas valeur propre de M, montrer qu'il existe P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(M) = 0$ et $P(\lambda) \neq 0$.

Exercice 407 *X 2012*
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de X^tX.

Exercice 408 *Centrale 2018*
a) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq \beta$.
On suppose que $(f - \alpha Id) \circ (f - \beta Id) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \alpha Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta Id) = E$.
b) Retrouver le résultat du cours concernant les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
c) Retrouver le résultat du cours concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

---

2. Jacques Salomon Hadamard, (1865 Versailles - 1962 Paris), mathématicien français. Hadamard, ou "la légende vivante des mathématiques", est sans doute le Français qui a marqué le plus le vingtième siècle mathématique. Son séminaire, à l'origine de la naissance du groupe Bourbaki fut le lieu où s'exerca son influence sur plusieurs générations de normaliens. Son résultat le plus connu est sa démonstration de $\varphi(n) \sim \frac{\ln n}{n}$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers $\leqslant n$ premiers avec n.
3. (**Семеи Ароиобиц Гершгорин**) , mathématicien biélorusse (1901-1933), ce théorème figure dans son article de 1931 : *Uber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix.*

Exercice 409 *X 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si λ est un réel strictement négatif qui est valeur propre de la matrice $A\overline{A}$, alors la dimension du sous-espace propre associé est paire.

Exercice 410 *Mines 2018*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ou non, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.
a) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
b) Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$ et $v(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.
c) Si E est de dimension finie, montrer a) pour λ quelconque.

Exercice 411 *Mines 2022*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que J est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
b) Montrer que les sous-espaces propres de J sont des sous-espaces propres de M pour des valeurs propres à préciser.
c) Calculer χ_M et $\det(M)$.
d) Déterminer M^{-1} lorsque cette matrice est inversible.

Exercice 412 *Mines 2023*
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si $u - \lambda Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif), alors $P(u) - P(\lambda)Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif).
b) Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(u) - \mu Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif), alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = \mu$ et $u - \lambda Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif).

Les incontournables

Exercice 413 *X 2008, 2012, 2013, Centrale 2014, 2022, Mines 2021, 2023*
Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 414 *X 2008, Mines 2008, Centrale 2011, X 2012*
Soient $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}. Que dire si on ne suppose plus A inversible ?

Exercice 415  *Mines 2019*

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) On pose $P_0 = X + a_{n-1}$ et, pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $P_j = X\,P_{j-1} + a_{n-1-j}$.
Déterminer P_{n-1}.
b) Calculer χ_A.
c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

Exercice 416  *X 2010* Déterminer les $M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse.

Exercice 417  *X 2018*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\operatorname{tr} A = 0$.

Exercice 418  *X 2009 et 2014, Mines 2011 et 2023, Centrale 2011, 2012 et 2023*
Soit $J = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $c_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $c_{n,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls.
Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$.
a) Diagonaliser J.
b) Montrer que A et J sont codiagonalisables.
c) Calculer $\det A$.
d) Déterminer les sev stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 419  *Mines 2008, 2011, 2012, 2017, 2022, 2023, X 2008, 2010 et 2014, Centrale 2009*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 est diagonalisable.
Démontrer que f est diagonalisable $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Exercice 420  *Mines 2013 et 2018, X 2016, Centrale 2018 et 2019*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 421  *Mines 2023*

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que M est diagonalisable.
b) Caractériser $\operatorname{Ker}(M)$ en donnant une équation, sa dimension et une base.
c) Montrer que M admet deux valeurs propres non nulles.
d) Déterminer ces valeurs propres ainsi que leurs espaces propres respectifs.
e) Donner le polynôme caractéristique de M.

Exercice 422 *Mines 2008, 2009 et 2017, X 2012, 2014, 2021 et 2023, Centrale 2018* Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MB$.

1. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.
2. Etudier la réciproque.
3. Montrer que $AM - MB = C$ a une unique solution M si et seulement si A et B n'ont pas de valeur propre commune.

Exercice 423 *Mines 2015 et 2019, X 2018 et 2022*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.
a) Montrer que B n'est pas inversible.
b) Calculer $AB^k - B^kA$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 424 *Mines 2019*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
a) Montrer que f est nilpotente.
b) On suppose que $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une base e de E dans laquelle $\operatorname{Mat}_e(f) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Mat}_e(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda+n \end{pmatrix}.$$

Exercice 425 *Mines 2008, 2016, 2017, X 2010, 2012, 2017, Centrale 2017*
Soit E un K.e.v. de dim finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

1. Montrer que $\det(Id_E + u) = 1$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Montrer que $\det(u+v) = \det v$.

Exercice 426 *Centrale 2007, 2011, 2015, 2022, X 2008, 2010, 2011, Mines 2021 et 2023*
Soit E un $\mathbb{C}$.e.v. de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que f est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr} f^k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.
b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de f si et seulement si $\operatorname{tr} f^k = n$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 427 *X 2011, Centrale 2016, 2022 et 2023, Mines 2016 et 2019*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si les $a_{i,j}$ sont tous positifs ou nuls et si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 1$.
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques. Montrer que AB est stochastique.
b) Soit A une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de A. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module $\leqslant 1$.
c) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques telles que A^{-1} soit stochastique.
d) Montrer que si A est à coefficients strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de module 1 et que le sous espace propre associé est une droite.

Exercice 428 *X 2011, Mines 2016, Centrale 2022* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
On définit : $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$ (commutant de A).

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
2. On définit : $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{C}(A), BC = CB\}$.
   Montrer que $C \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) \Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]n, P(A) = C$.

Exercice 429 *Mines 2012, 2013, 2014, Centrale 2014, X 2016 et 2021*
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que le commutant de u est égal à $\mathrm{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$.

Exercice 430 *Mines 2009, 2011 et 2018, X 2021*
Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}\, u$ est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$.
b) Montrer que v est un automorphisme.
c) Montrer que u est de rang pair.
d) Réduire u lorsque u est non nul et $\dim E = 3$.

Exercice 431 Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $M^2 + M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 432 *Mines 2011, 2012, 2013, 2016, 2017 et 2019, Centrale 2017*
Soit E un $\mathbb{R}$.e.v. de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ définie par : $\varphi(f) = f + (\mathrm{tr}\, f)Id$.
Calculer $\det \varphi$, trace (φ) et les éléments propres de φ.

Exercice 433 *Centrale 2009*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM\,{}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si et seulement si $(X_i\,{}^tY_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
3. Montrer que si A est diagonalisable alors f_A est diagonalisable.

4. On suppose que A est non nulle, que $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de A et que Y est un vecteur propre pour la valeur propre λ.
   Soit $F = \{X\,{}^tY,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f_A.
5. Montrer que si f_A est diagonalisable alors A est diagonalisable.

Exercice 434 *Mines 2008, 2010, 2011, 2016*[4] *, Ens Lyon 2008, X 2010, Centrale 2012*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$.

Condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable ?

Exercice 435 *X 2020*

Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $A \otimes B$ la matrice blocs

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$$

a) On suppose A et B inversibles. Montrer que $A \otimes B$ est inversible.
b) On suppose A et B diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable.

Exercice 436 *X 2005, Centrale 2011, Mines 2023*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$.
a) Montrer que A est un polynôme en B.
b) Le résultat reste-t-il vrai si on prend $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable ?

Exercice 437 *Mines 2017 et 2023, X 2021*

a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$ si, et seulement si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $B = PA$.
b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice P inversible, la matrice PA est diagonalisable. Que dire de A ?

Exercice 438 *Centrale 2006, 2013, 2017 et 2018, X 2018*

Soient $A \in \mathbb{C}[X]$, B un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soit M_B l'application qui à un polynôme de E associe son reste dans la division euclidienne par B.
Pour $P \in E$, on note $f(P) = M_B(AP)$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Montrer que f est bijective si et seulement si les seuls diviseurs communs de A et B sont constants.
c) On suppose que B possède $n+1$ racines distinctes. Étudier la diagonalisabilité de f.

---

4. En 2016, c'était pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 439 *Mines 2005, 2010 et 2021, X 2007 et 2009*
a) Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{sp}\,(u) = \{1, 2, \ldots, n\}$. L'endomorphisme u possède-t-il un nombre fini de sous-espaces stables ? Si oui, combien ?
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie possède un nombre fini de sous-espaces stables.

Exercice 440 *Mines 2008*
Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$ constituée exclusivement de matrices non diagonalisables ?

Exercice 441 *Mines 2010, 2012, 2022, Centrale 2014, X 2021*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 442 *X 2011, 2014 et 2022, Mines 2014*
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?
b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

Les autres

Exercice 443 *X 2018* Déterminer les $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que M et M^{-1} soient semblables.

Exercice 444 *X 2010* Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

Exercice 445 *Centrale 2007* Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle et de même déterminant. Sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 446 *Ens et X 2023*
Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$. On note $\mathrm{ord}(A) = \inf\{n > 0,\ A^n = I\}$.
a) Montrer que si $\mathrm{ord}(A) < +\infty$ alors $\mathrm{ord}(A)$ divise 12.
b) Soient $A, B \in G$. On suppose que $\mathrm{ord}(A) = \mathrm{ord}(B) < +\infty$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Peut-on toujours prendre P dans G ?

Exercice 447 *X 2023*
Trouver les matrices A de $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{C})$ telles que $A^p = A$, où p est un entier $\geqslant 2$.

Exercice 448 *X 2010* Soit $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (i,j) \in \{1,2\}^2$, $|(A^n)_{i,j}| \leqslant m$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 449 *X 2012 et 2020* Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^{2024} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

Exercice 450 *Ens 2019*
Soit n un entier impair $\geqslant 3$. Caractériser les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A = M^n$.

Exercice 451 *X 2016*
Soit $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} = A^T$ et $\det A \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $AX = X$.

Exercice 452 *X 2012*
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{2025} = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 453 *Centrale 2022*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour un entier $p \geqslant 3$, $A^p = I_2$ et $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $A^k \neq I_2$.
a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Montrer qu'il existe $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{pgcd}\,(k, p) = 1$.

Exercice 454 *X 2022* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les propriétés :
i) A est inversible, et A est semblable à A^{-1},
ii) il existe deux matrices B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$ et $B^2 = C^2 = I_n$.
a) Montrer que ii) implique i).
b) Montrer que i) implique ii) si $n = 2$.

Exercice 455 *Mines 2022 et 2023*
a) Soient A une matrice réelle et $t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\det(A^2 - tI_n) \geqslant 0$.
b) Soit un entier n impair. Montrer que l'on ne peut pas écrire $-I_n$ comme la somme de deux carrés de matrices réelles.

Exercice 456 *X 2023*
Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $AB + BA = A$.
a) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
b) Que dire si n est impair.

Exercice 457 *Mines 2009 et 2019*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Exercice 458 *X 2007, 2012 et 2018, Mines 2013* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes vérifiant $uv - vu = \alpha u$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Exercice 459 *Mines 2013, 2015 et 2017, X 2020*
Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB - BA = C, BC = CB, AC = CA$.
a) Montrer que A, B et C ont un vecteur propre commun.
b) Montrer que A, B et C sont cotrigonalisables.

Exercice 460 *X 2023*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB^2 - B^2A = B$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^{2p} \neq 0$ et $B^{2p+1} = 0$.

Exercice 461 *Mines 2018*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que (AX, BX) soit liée.
b) Montrer qu'il existe P, Q inversibles telles que $Q^{-1}AP$ et $Q^{-1}BP$ soient des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 462 *Mines 2022*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$.

Exercice 463 *Centrale 2017*
On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient M_1, M_2, D_1, D_2 dans E avec M_1 et M_2 nilpotentes, D_1 et D_2 diagonalisables. On suppose que les quatre matrices commutent et que $D_1 + M_1 = D_2 + M_2$.
Montrer que $D_1 = D_2$ et $M_1 = M_2$.

Exercice 464 *X 2007, Mines 2008* Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose qu'il existe $n + 1$ valeurs de λ pour lesquelles $A + \lambda B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 465 *Mines 2010*
Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$. Déterminer le nombre de matrices commutant avec D et semblables à D.

Exercice 466 *X 2017*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer les dimensions possibles du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:
$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ AB = BA\}$.

Exercice 467 *X 2012* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A - B) \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 468 *X 2011, Mines 2018*
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent.
Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 469 *Mines 2014* Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $XY = YX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 470 *Centrale 2011*
Soient E un K espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.
a) On suppose : $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$. Montrer que f et g sont diagonalisables. À quelle conditions sont-ils codiagonalisables ?
b) On suppose que $f \circ g - g \circ f = g - f$. Montrer que $g - f$ est nilpotent.

Exercice 471 *X 2009*
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(s_i)_{i \in I}$ des symétries distinctes de E qui commutent. Montrer que I est fini. Donner le cardinal maximal de I.

Exercice 472 *X 2007, 20212, 2018 et 2019*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On suppose que $fg - gf = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. En déduire que f et g sont trigonalisables dans une même base.

Exercice 473 *X 2021*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$, $a_{i,j} = i + j^2$ si $i \leqslant j$. Combien y a-t-il de solutions de l'équation $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 474 *X 2015*
a) Déterminer la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices M vérifiant $M^2 = \mathrm{Diag}(1, 2)$.
b) Déterminer la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices M vérifiant $M^2 = I_2$.

Exercice 475 *Centrale 2016*
Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour que l'équation $A^3 = B$ d'inconnue $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ait au minimum une solution.

Exercice 476 *Mines 2010*
Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{tr}\, M = 0$ et $M^2 + {}^tM = I_3$?

Exercice 477 *Mines 2023*
Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 8$. Déterminer χ_A.

Exercice 478 *X 2019* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^3 + 2A + 2I_n = 0$. Montrer que 3 divise n.

Exercice 479 *Mines 2008 et 2011*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 480 *Mines 2008*
Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ telles que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$, $C^3 = 5A + 6B$.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 481 *Mines 2008 et 2011* Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix} \end{array} \right.$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ?
b) Montrer que 1 est valeur propre, quelle est sa multiplicité ?

Exercice 482 *Mines 2021, 2022 et 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.
On considère l'application $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(M)\, A - \operatorname{tr}(A)\, M$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Déterminer le noyau de Φ.
c) Déterminer le spectre et les espaces propres de Φ.
d) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
e) Montrer que Φ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 483 *Centrale 2023*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit $f_\alpha : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^T + \alpha M$.
a) Montrer que f_0 est diagonalisable.
b) Trouver les $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que f_α soit diagonalisable.
c) Trouver les $\alpha \in \mathbb{K}$ et les $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que l'équation $f_\alpha(M) = B$ admette une unique solution. On pourra par exemple s'intéresser aux cas $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Exercice 484 *Mines 2008 et 2014*
Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M de colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ associe M' de colonnes $(C'_1, \ldots, C'_n)$ où $C'_i = \displaystyle\sum_{k \neq i} C_k$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 485 *Centrale 2009 et 2011, Mines 2011 et 2012*
Soient E un K espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(u) = (p \circ u + u \circ p)/2$.

1. Étudier les valeurs propres de Φ.

2. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
3. Qu'en est-il si E est de dimension infinie ?

Exercice 486 *X 2022*
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'endomorphisme $\Phi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que toute valeur propre de f est valeur propre de Φ.
b) Pour une valeur propre λ de f, expliciter le sous-espace propre de Φ associé à λ en fonction de celui de f.
c) Le caractère diagonalisable de f implique-t-il celui de Φ ?

Exercice 487 *Mines 2023*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM - MA$.
a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) On suppose que A est nilpotente. Montrer que φ est nilpotente.
c) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 488 *X 2012*
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.
a) On suppose Φ nulle. A t-on nécessairement $(A, B) = (0, 0)$?
b) On suppose A et B diagonalisables. L'application Φ est-elle diagonalisable ?
c) On suppose A et B nilpotentes. L'application Φ est-elle nilpotente ?

Exercice 489 *Centrale 2014, Mines 2023*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 - u + Id = 0$.
a) Si $x \neq 0$, montrer que $(x, u(x))$ est libre.
b) Soient x et y dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. On suppose que y n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(x, u(x))$. Montrer que $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.
c) Que dire de la parité de n ? du polynôme caractéristique de u ? du déterminant et de la trace de u ?
d) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 490 *X 2017*
Déterminer les $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2 = P$ et telles qu'il existe a et b réels pour lesquels $aP + bP^T = I_n$.

Exercice 491 *X 2015*
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de vecteurs propres de u dont toute sous-famille de cardinal n est libre. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 492 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}.

Exercice 493 *X 2015*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, tous les coefficients en dehors de la diagonale sont égaux à 1. Déterminer les valeurs propres de M.

Exercice 494 *Mines 2023*

Soient $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Exprimer χ_A à l'aide des coefficients de A.

Exercice 495 *classé* *Centrale 2017*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{i,j} = 1$ si $i = n+1$ ou $j = n+1$, et 0 sinon. Déterminer les éléments propres de A et A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 496 *X 2006, 2007, 2009 et 2021, Centrale 2013, Mines 2015, 2016, 2019 et 2022*

Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $L(P) = X^n P(1/X)$. Montrer que L est diagonalisable. Déterminer ses sous-espaces propres.

Exercice 497 *Mines 2018, Centrale 2012 et 2018*

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) On suppose M diagonalisable.

(i) Montrer que A et C le sont.

(ii) Montrer qu'il existe $P = \left(\begin{array}{c|c} U & W \\ \hline 0 & V \end{array}\right) \in \mathrm{GL_{2n}}(\mathbb{C})$ avec $U, V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

b) On suppose désormais que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(C) = \varnothing$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et C pour que M soit diagonalisable pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 498 *Centrale 2012*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right)$. On suppose M diagonalisable.

a) Si $B = 0$, montrer que A est diagonalisable.

b) Si $A = 0$, montrer que B est diagonalisable.

c) Donner un exemple de matrices A, B non toutes deux diagonalisables mais telles que M soit diagonalisable.

Exercice 499 *X 2017, Mines 2023*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.

b)À quelle condition (nécessaire et suffisante) la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 500  *X 2008, Mines 2021*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline 0 & 3A \end{array}\right)$. A quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 501  *Mines 2009*

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sev stables par u.

Exercice 502  *X 2012*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. a) Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^2) = A$? b) Soit $k \in \mathbb{N}$ impair. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^k) = A$.

Exercice 503  *X 2012*

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $M = \lambda I_n + B$. Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $P(M) = \mu I_n$.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $M = A + B$. On suppose que $AB = BA$. Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(M) = Q(A)$.

Exercice 504 *Classé X*

Diagonaliser la matrice $X = \begin{pmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & & & a \end{pmatrix}$

Exercice 505 *classé Z*

Diagonaliser la matrice $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 506 *classé N* *Mines 2021*

Diagonaliser la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 507 *X 2015*
a) Soit $A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}),\ M^2 = I_4\}$. Déterminer le nombre maximal d'éléments de A non semblables entre eux.
b) Soit $A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}),\ M^2 = -I_4\}$. Déterminer le nombre maximal d'éléments de A non semblables entre eux.

Exercice 508 *Mines 2021*
a) Soient $A = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices A et B soient semblables.
b) Soient des nombres réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quel est le nombre maximum de matrices diagonales de spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ deux à deux non semblables ?
c) Quel est le nombre de matrices diagonales semblables à $\mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_p I_{n_p})$ où les n_i sont des entiers strictement positifs de somme n ?

Exercice 509 *X 2021*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des matrices complexes $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble des matrices semblables à M et commutant avec M est fini.
a) Montrer que toute matrice M admettant n valeurs propres distinctes appartient à E_n.
b) Déterminer E_2.
c) Déterminer E_3.

Exercice 510 *X 2016*
Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $M = I_n + 3P$. Montrer que $M^3 \neq I_n$. Plus généralement, montrer, pour $k \in \mathbb{N}$, que $M^{3^k} \neq I_n$.

Exercice 511 *X 2018*
a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer que z est une racine de l'unité.
Soit $G \subset \mathrm{GL_d}(\mathbb{C})$ fini, non vide, stable par produit et par passage à l'inverse.
b) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = Id$.
c) Soit $g \in G \setminus \{Id\}$. Montrer que $\mathrm{tr}(g) \neq d$.

Exercice 512 *X 2022* On pose $L : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto ((1 - X^2)P')' \in \mathbb{R}[X]$.
a) Est-ce que L est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$?
b) Déterminer les éléments propres de L.

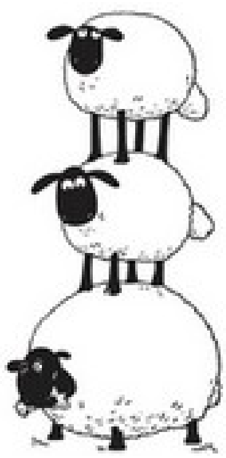
Exercice 513 *Centrale 2023*
Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi(1) = 1$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P)' = \varphi(P')$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(X^n) = X^n + R_n$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ. À quelle condition l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?
c) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 514  *Mines 2022*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. On pose $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto X(X+1)P' - 2kXP$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ induise un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Déterminer alors les éléments propres de φ.

Exercice 515  *X 2010 et 2012* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que M est semblable à $2M$. Montrer que M est nilpotente. Que dire de la réciproque ?

Exercice 516  *X 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ où les λ_i sont distincts et où λ_i est de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec
$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_r} + N_r \end{pmatrix}$, où les N_i sont des matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle.
b) On suppose que A est inversible et qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left|\left[A^k\right]_{i,j}\right| \leqslant C$.
Montrer que $A = QDQ^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $D = \mathrm{Diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$ où, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $|d_i| = 1$.

Exercice 517  *X 2017 et 2020*
Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Montrer l'équivalence entre : ((i) il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E, (ii) $(Id, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre.



Exercice 518 *Centrale 2014* Trois moutons sont dans un pré, et naturellement, ils jouent à saute-mouton :
Le premier mouton saute par dessus le deuxième, et se retrouve donc dans la position symétrique de la position qu'il occupait par rapport au deuxième mouton. Puis le deuxième mouton saute au-dessus du troisième. Enfin, le troisième saute au-dessus du premier (qui, rappelons-le, a déjà bougé). Et le jeu recommence indéfiniment.
En assimilant le pré à un plan et les moutons à des points du plan, trouver les configurations de départ qui entraine une partie de saute-mouton pouvant se dérouler entièrement dans un champ, c'est-à-dire telles

que la suite des positions successives des trois moutons reste bornée dans le plan.

Question  : représenter les trajectoires des moutons.

Exercice 519  *X 2010*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = f + g$.
a) Montrer : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$.
b) On suppose f et g diagonalisables. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable et que $\text{Sp}\,(f \circ g) \subset \mathbb{R} \backslash]0, 4[$.

Exercice 520  *X 2008 et 2020, Mines 2011 et 2023*
Déterminer les éléments propres de $A = ((a_{ij}))$ avec $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et 0 sinon.
Ind : Calculer $\det(A - 2\cos(a) I_n)$.

Exercice 521  *Mines 2011* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que le spectre de A est égal à l'ensemble des racines $n$ièmes de l'unité. Soient $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$ et $M = A - cI_n$. Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A.

Exercice 522  *Mines 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$.
a) Montrer qu'il existe $p < q$ tel que $A^p = A^q$.
b) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ telle que A^r est une matrice de projection.
c) La matrice A est-elle nécessairement diagonalisable ?

Exercice 523  *X 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres non nulles distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
a) Montrer qu'il existe des nombres complexes $c_{i,j}$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} c_{i,j} \lambda_i^k A^j$.
b) Montrer l'unicité des $c_{i,j}$.
c) On suppose de plus A inversible. Montrer que la formule reste vraie si $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 524  *Ens 2021* On considère la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de matrices définie par $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{a_n} \\ I_{a_n} & -A_n \end{pmatrix}$ où a_n est la taille de la matrice A_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Déterminer a_n. Calculer A_n^2. Déterminer les valeurs propres de A_n ainsi que leurs multiplicités.
b) Soient $i_1 < i_2 < \cdots < i_{a_n/2-1}$ des entiers compris entre 1 et a_n. On supprime dans la matrice A_n les

lignes et les colonnes d'indices $i_1, i_2, \dots, i_{an/2-1}$. Soit B_n la matrice obtenue. Montrer que $\sqrt{n}$ est valeur propre de B_n.

Exercice 525 *X 2020*
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe deux matrices $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = \lambda BA$.
b) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ vérifiant $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables.

Exercice 526 *X 2023*
Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

Exercice 527 *X 2023*
Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble des matrices semblables à A engendre l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 528 *X 2021, Mines 2023*
Soient A et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre
i) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AB+M} = \chi_{AB}$; ii) M nilpotente et $MA = 0$.

Exercice 529 *X 2014*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer l'équivalence entre : (1) u est une homothétie (2) $\forall v, w \in \mathcal{L}(E),\ u = v \circ w \Rightarrow u = w \circ v$.

Exercice 530 *X 2023*
Soit G une partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui contient I_2 et qui est stable par produit et passage à l'inverse. On note $\mathrm{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de G. Montrer que $\mathrm{Vect}(G) \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :
(i) il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure,
(ii) il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Exercice 531 *X 2012*
Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que, pour t petit : $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(f^k)\,\frac{t^k}{k}\right) = \det(Id - tf)^{-1}$.
