



毛泽东, " 人的社会存在是他们思想的决定因素" ₁

	Vrai / Faux	V	F
1	Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.	☐	☐
2	Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments triangulaires.	☐	☐
3	Le déterminant d'une matrice nilpotente est nul.	☐	☐
4	Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.	☐	☐
5	Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers positifs est un entier positif.	☐	☐
6	Le déterminant d'un produit de matrices, est le produit de leurs déterminants.	☐	☐
7	Le déterminant d'une somme de matrices, est la somme de leurs déterminants.	☐	☐
8	En intervertissant deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.	☐	☐
9	Le déterminant d'un endomorphisme est le même dans toutes les bases.	☐	☐
10	Un endomorphisme est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.	☐	☐
11	$\det A = \det {}^t A$.	☐	☐
12	$x \mapsto \det(A + xB)$ est une fonction polynômiale.	☐	☐
13	$\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.	☐	☐
14	Le déterminant est une forme linéaire.	☐	☐
15	$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.	☐	☐
16	Pour calculer le déterminant, on peut effectuer des manipulations sur les lignes, ou sur les colonnes, mais il ne faut pas mélanger les deux méthodes.	☐	☐

Les basiques

Exercice 351  X 2016

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq n < m$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Que dire de $\det(AB)$?

Exercice 352  Mines 2015

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i x_j$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

1. « L'existence sociale des hommes est le déterminant de leurs pensées. », Mao Tse-Toung, *D'où viennent les idées justes*, 1963.

Exercice 353

Calculer :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

Exercice 354*Mines 2015*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (\min\{i, j\})_{1 \leq i, j \leq n}$. a) Calculer le déterminant de A .
 b) Si la matrice est inversible, déterminer son inverse.

Exercice 355*Mines 2019*

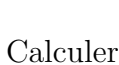
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k e^{\alpha x}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension de E_n .

b) Montrer que l'application $D_n : f \in E_n \mapsto f'$ est un endomorphisme de E . Montrer que D_n est un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Les incontournables

Exercice 356

Calculer :

Mines 2008

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & \ddots & & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 357*Mines 2021*

Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 358Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = a, \quad \forall i < j, a_{ij} = b, \quad \forall i > j, a_{ij} = c$. Calculer $\det A$.

Exercice 359*ENS MP 1974*

a) Soit A une matrice carrée de taille 41×41 dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0 et les autres coefficients valent ± 1 . La matrice A est-elle inversible ?

b) Même question pour une matrice carrée de taille **42** $\times$ **42**.

Exercice 360  CCP 1997, Centrale 2005, 2006 et 2011, X 2009, Mines 2012, 2014 et 2016

- a) Déterminer les $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + M) = \det M$.
b) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(B + M)$. Montrer que $A = B$.
c) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.
-

Exercice 361  Mines 2021 et 2023

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$ et D inversible. Comparer le déterminant de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et de celui de $AD - BC$. Le résultat subsiste-t-il si D n'est pas inversible ?

Exercice 362  Ens et X 2010

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, montrer : $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$ puis que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0$.

Exercice 363  Mines 2021 et 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pose $P(X) = \det(XA + B)$.

Montrer que $\deg(P) \leq \text{rg}(A)$ et que $\text{val}(P) \geq n - \text{rg}(B)$.

Exercice 364  Ens 2007, 2009, X 2012, 2016, 2022, Mines 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lequel tout élément non nul appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Le résultat obtenu pour $\mathbb{C}$ vaut-il encore pour $\mathbb{R}$? Résoudre la question précédente pour $n = 2$ et $\mathbb{R}$ à la place de $\mathbb{C}$.
-

Exercice 365 

Soient $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{C}_{n-1}[X])^n$.

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} P_1(z_1) & P_1(z_2) & \dots & P_1(z_n) \\ P_2(z_1) & P_2(z_2) & \dots & P_2(z_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_n(z_1) & P_n(z_2) & \dots & P_n(z_n) \end{pmatrix}$. On note $V(z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \vdots & & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$, la matrice de Vandermonde de $(z_1, \dots, z_n)$.

1. Calculer M en fonction de $V(z_1, \dots, z_n)$. En déduire $\det(M)$.

2. Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & 4^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} & \end{pmatrix}$.

Exercice 366



X 2023

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $P = aX + b$, $Q = cX + d$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Phi(X^k) = P^k Q^{n-k}$.

Calculer $\det(\Phi)$.

Les autres

Exercice 367



Centrale 2019

On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $A_p = ((i+j-1)^p)_{1 \leq i, j \leq p+1}$ et $B_p = ((i+j-1)^p)_{1 \leq i, j \leq p+2}$.

a) Montrer que B_p n'est pas inversible. Ind. Utiliser le polynôme $P_i(X) = (X+i)^p$.

b) Calculer $\det(A_p)$. Ind. Calculer BC avec $B = \left(\binom{p}{j-1} i^{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq p+1}$ et $C = ((j-1)^{p+1-i})_{1 \leq i, j \leq p+1}$.

Exercice 368



X 2014

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $C(z)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $z + 1/z$, les coefficients en dehors de la diagonale étant égaux à des $c_{i,j}$ fixés dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| \leq R$, la matrice $C(z)$ soit inversible.

b) Trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^N \det(C(z))$ ait une limite quand $|z| \rightarrow 0$. On déterminera la valeur de la limite.

Exercice 369



X 2013

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à a , les coefficients sur-diagonaux et sous-diagonaux égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Calculer le déterminant de A .

Exercice 370



Centrale 2022

Soient $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ distincts et

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^n \\ 1 & x & \dots & x^{n-2} & x^n \end{vmatrix}$$

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P .

b) Donner une forme factorisée de P .

c) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & \cdots & x_k^{n-2} & x_k^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$ où $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

d) Proposer une autre méthode pour calculer D_n .

Exercice 371



Mines 2022

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, calculer $\Delta(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ (x+3)^k & 4^k & 5^k & \cdots & (n+2)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x+n-1)^k & n^k & (n+1)^k & \cdots & (2n-2)^k \\ (x+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$.

Exercice 372



X 2002

Calculer $\det A$ avec $A = ((a_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $a_{ij} = \frac{1}{(i+j)!}$.

(☛ remplacer la dernière ligne par $\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{x^{2n}}{(2n)!}$).

Exercice 373



X 2020

Soit $n \geq 2$. Pour A et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $f_{A,M} : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xM)$. Déterminer toutes les matrices M telles que $f_{A,M}$ est une fonction affine pour toute matrice A .

Exercice 374



X 1997

Calculer $\det A$ avec $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$

(Déterminant de Cauchy²).

Exercice 375



Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Calculer $D = \det A$ avec $a_{i,j} = P(i+j-1)$.

2. Augustin-Louis Cauchy 1789 Paris - 1857 Sceaux, mathématicien français. Les nombreux objets mathématiques qui portent son nom : *théorème de Cauchy intégral*, *théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles*, *suites de Cauchy*, *inégalité de Cauchy-Schwarz*, *déterminant de Cauchy*, ... témoignent de sa prodigieuse créativité. Ses oeuvres complètes : *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* sont publiées en 27 volumes aux éditions Gauthier-Vilars (possibilité de commande groupée). On pourra se rendre également rue Cauchy, dans le 15ème, où se trouve une station de Velib'.

Exercice 376

Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos 2a_1 & \dots & \cos na_1 \\ 1 & \cos a_2 & \cos 2a_2 & \dots & \cos na_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos a_{n+1} & \cos 2a_{n+1} & \dots & \cos na_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 377*X 2005 et Centrale 2009*

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré ≥ 1 , on note $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P et $r^+(P)$ le nombre de racines distinctes de P dans $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Que dire de $r^+(P)$ si $N(P) = 1$ ou si $N(P) = 2$?
2. Montrer que $r^+(P) \leq 1 + r^+(P')$.
3. On suppose que $P(0) = 0$. Montrer que $r^+(P) \leq r^+(P')$.
4. Montrer que $r^+(P) \leq N(P) - 1$.
5. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $0 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Montrer que $\det \left((x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n} \right) > 0$.

Exercice 378*Mines 2014*

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$. Montrer : $|\det A| \leq 1$.

Exercice 379*Matrice circulante**Mines et X 2014*

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$, $H = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $h_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $h_{n,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls. Soit $M = a_0 I_n + a_1 H + \dots + a_{n-1} H^{n-1}$.

Exprimer le déterminant de M en fonction de $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ et de $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Exercice 380*X 2016*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(A + B)^k = A^k + B^k$.

Exercice 381*Mines 2013*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer, pour $t \in \mathbb{R}$: $\det(A + tJ) \det(A - tJ) \leq \det(A^2)$.

Exercice 382*Mines 2013 et 2014, X 2017 et 2020,*Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, on a : $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.
- b) Montrer que, si n est impair, $A^2 + B^2 \neq -I_n$.
- c) On suppose $n = 2m$ pair. Donner un exemple où $A^2 + B^2 = -I_n$.

Exercice 383  *X 2011* Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On voit E comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on le note alors $E_{\mathbb{R}}$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ que l'on voit aussi comme $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{R}})$.

- Vérifier que $f_{\mathbb{R}}$ est bien un endomorphisme de $E_{\mathbb{R}}$.
- Exprimer $\text{tr}(f_{\mathbb{R}})$ en fonction de $\text{tr}(f)$.
- Exprimer $\det(f_{\mathbb{R}})$ en fonction de $\det(f)$.

Exercice 384  *X 2017 et 2020*

On dit que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ anticommulent si et seulement si $BA = -AB$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles il existe A et $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ qui anticommulent.

Exercice 385  *Centrale 2012* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

- Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\det(A^{2024} + B^{2024}) \geq 0$.
 - On suppose de plus : $\det(A + B) \geq 0$. Montrer que $\det(A^{2025} + B^{2025}) \geq 0$.
 - Trouver A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A^{2026} + B^{2026}) < 0$.
-

Exercice 386  *Mines 2023*

Soit $(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{L}(E, \mathbb{C}))^p$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

- $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre,
 - l'application $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$ est surjective,
 - $\exists (x_1, \dots, x_p)$ tel que $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}) \neq 0$.
-

Exercice 387  *X 2021*

Soient n un entier impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $M = aA + bA^T$. Montrer que le déterminant de M est un entier divisible par $a + b$.

Exercice 388  *X 2014, Ens 2023* Calculer la trace et le déterminant des endomorphismes suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $M \mapsto M^T$.
 - $M \mapsto AM$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
-

Exercice 389  *Centrale 2016*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM + MA$. Déterminer la trace et le déterminant de φ .

Exercice 390  *Mines 2009*

Soit f l'application qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer son déterminant.

Exercice 391

X 2018 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$,

on pose $D(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$ et $[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$

Soient $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. Montrer que $[a_1, \dots, a_n] = \frac{D(a_1, \dots, a_n)}{D(a_2, \dots, a_n)}$.

Exercice 392

Mines 2021 et 2023

Calculer $D_n = \det(F_{|i-j|})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, où $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 393

Mines 2021 et 2022

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que : $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\det(A + kB) = \pm 1$.

- Montrer que A est inversible.
- Montrer que B n'est pas inversible.

Exercice 394

Ens 2021

On note $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1 . On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont $\mathbb{Z}$ -semblables s'il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables sur $\mathbb{C}$ sont-elles $\mathbb{Z}$ -semblables ?

Exercice 395 Soit $p, c, \acute{e}, t, l, e \in \mathbb{R}^6$,

on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \begin{vmatrix} p & p & p & p & p & p & p & p & p \\ p & c & c & c & c & c & c & c & c \\ p & c & \acute{e} & \acute{e} & \acute{e} & \acute{e} & \acute{e} & \acute{e} & \acute{e} \\ p & c & \acute{e} & t & t & t & t & t & t \\ p & c & \acute{e} & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & c & \acute{e} & t & 0 & i & i & i & i \\ p & c & \acute{e} & t & 0 & i & l & l & l \\ p & c & \acute{e} & t & 0 & i & l & e & e \\ p & c & \acute{e} & t & 0 & i & l & e & n \end{vmatrix}$

Comparer $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$.