



MATRICES

« The Matrix is everywhere, it is all around us, even now in this very worksheet. »
Matrix, 1999., A. et L. Wachowski

	Vrai / Faux	V	F
1	Soient A, B et C , trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A non nulle, alors $A \times B = A \times C$ implique $B = C$.	☐	☐
2	L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sev supplémentaires.	☐	☐
3	Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.	☐	☐
4	Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de rang 1.	☐	☐
5	Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de rang n .	☐	☐
6	Les matrices diagonales commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	☐	☐
7	Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.	☐	☐
8	Pour toutes matrices A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.	☐	☐
9	Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.	☐	☐
10	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est nilpotente ssi A est triangulaire stricte.	☐	☐
11	Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi elles ont la même trace.	☐	☐
12	Si $A = \lambda I_n$ alors A est la seule matrice semblable à elle-même.	☐	☐
13	Si $A = \lambda I_n$ alors A est la seule matrice équivalente à elle-même.	☐	☐
14	La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.	☐	☐

Voici un système de hiérarchisation des exercices, en fonction de leur difficulté réelle ou supposée. Il faut garder à l'esprit que l'évaluation de la difficulté de chaque exercice est purement subjective et peut donc varier d'un individu (examineur ou examiné) à l'autre. Le code retenu pour qualifier chaque exercice est le suivant :

-  désigne un exercice proche du cours ou une application directe du cours, faisable avec une tétine dans la bouche.
-  désigne un exercice qui mobilise relativement peu de neurones, faisable en buvant une bonne bière¹.
-  désigne un exercice qui requiert une certaine dose d'ingéniosité.
-  désigne un exercice retors, et qui, quand on l'a résolu, donne envie de faire un boeuf endiablé au saxophone.
-  désigne un exercice méchant².
-  désigne un exercice barge².

Les basiques

Exercice 281 X 2018

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + A + B = 0$.

- a) On suppose A diagonale à coefficients diagonaux distincts. Montrer que B est diagonale.
- b) La propriété est-elle vraie si A est seulement diagonale ?

Exercice 282 X 2016, Mines 2021

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que ${}^tMM = M{}^tM$. Montrer que M est diagonale.

Exercice 283 Centrale 2013

Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

À quelle condition les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ sont-elles semblables ?

Exercice 284 Mines 2021

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, on pose $S_j = X^j(1 - X)^{n-j}$. a) Exprimer P , la matrice de la famille $(S_j)_{0 \leq j \leq n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que la famille $(S_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Calculer P^{-1} .

Exercice 285 X 2014

a) Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est annulée par un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$.

b) Soient $A, C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k B = C^k D$. Montrer que $B = D$.

1. Exercices à consommer avec modération.

2. à moins que ça ne soit l'examineur.

Exercice 286*Centrale 2023*

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice 2. On pose $r = \text{rg } u$, $p = n - r$ et on considère la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$

suivante : $I_{p,r} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $2r \leq n$. b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_{p,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. c) On pose $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.
-

Exercice 287*Mines 2023*

Soit $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) ; \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A^T) = f(A)^T\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Les incontournables

Exercice 288*Ens 2023*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Si $A + iB \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
b) Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
-

Exercice 289*Matrices commutants avec toutes les autres*

On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ et l'exprimer en fonction des symboles de Kronecker.
 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, calculer $A \times E_{i,j}$ et $E_{i,j} \times A$.
 3. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(K), A \times M = M \times A$.
 4. *X 2012* Déterminer $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), AM = MA$.
-

Exercice 290

Soit D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts 2 à 2. Déterminer le commutant de D : $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), DM = MD\}$.

Exercice 291

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $t \in \mathbb{K}^*$, on note D_t la matrice diagonale $D_t = \text{diag}(1, t, t^2, \dots, t^{n-1})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle classe de similitude de A , l'ensemble des matrices semblables à A .

1. Calculer $D_t^{-1} \times A \times D_t$.
 2. Montrer que la classe de similitude de A est bornée si et seulement si A est une matrice d'homothétie.
-

Exercice 292*Centrale 2009 et 2010, Mines 2018 et 2019*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle et telle que $A^2 = 0$.

1. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Donner les matrices de passage pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 293  *X 2009, Centrale 2015, lemme d'Hadamard³, matrices à diagonale dominante.*
 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 294  *Centrale 2008, 2009, 2013, X 2008, 2009, 2010, 2012, 2013, Ens 2012, Mines 2016, 2021, 2022*

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

- On suppose que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \Phi(AB) = \Phi(BA)$. Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.
- On suppose que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \Phi(P^{-1}AP) = \Phi(A)$. Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.

Exercice 295  *Mines 2023*

On considère $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$.

- Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice dans la base canonique de l'induit de D sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par D .

- Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $F \subset \mathbb{R}_n[X]$, $R \in F$ et R de degré n .
- Montrer que $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre.
- Montrer que $F = \mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie stables par D .

Exercice 296 

- Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire $A = C \times L$ où C est une matrice colonne non nulle et L une matrice ligne non nulle.
- Donner un résultat analogue pour les matrices de rang 2.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Calculer A^p .

Exercice 297  *Mines 2011, 2014, 2015, 2016, 2022 et 2023, Centrale 2022*
 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + (\text{tr } M)A = B$.

Exercice 298  *Centrale 2010, 2018 et 2022, Ens 2017, Mines 2019*
 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $M \neq \lambda I_n$) et telle que $\text{tr } M = 0$

- Montrer qu'il existe une matrice colonne X_1 telle que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1 .

3. Jacques Salomon Hadamard, (1865 Versailles - 1962 Paris), mathématicien français.

2. En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $\text{tr } M_1 = 0$.
 3. Montrer que M est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
 4. Montrer qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.
 5. Cas général : montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.
-

Exercice 299  Mines 2016

Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 300  X 2015, Mines 2007, 2014, 2019, 2021, 2023, Centrale 2023

a) Montrer que les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$ sont les applications de la forme $\varphi : A \rightarrow \text{tr}(AM)$, où $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

b) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.

Les autres

Exercice 301  X 2014

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A non nul à coefficients réels.

Exercice 302  X 2020

On considère $F : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} \cos a + \cos b & \sin a - \sin b \\ -\sin a - \sin b & \cos a - \cos b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer l'image de F .

Exercice 303  X 2014

Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists \lambda \in \mathbb{R}, Mx = \lambda x\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.

Exercice 304  Mines 2017, X 2019

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $3n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f) = 2n$ et $f^3 = 0$. Montrer

qu'il existe une base e de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 305*Mines 2016*

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n .

a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $m_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, les autres coefficients étant nuls.

b) En déduire les sous-espaces de E stables par u .

Exercice 306*Mines 2018*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n-1$. Montrer que $I_n + A$ et $(I_n + A)^{-1}$ sont semblables.

Exercice 307*Mines 2008, 2009, 2011 et 2023*

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \text{Diag}(0, 1, 1)$. Déterminer BA .

Exercice 308*X 2021, 2022, Mines 2023*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ et $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$.

Exercice 309*X 2014, Centrale 2016, Mines 2019*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0$. Que peut-on dire de $BABA$?

Exercice 310*Centrale 2011, Mines 2018*

a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_n$.

Montrer que A est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

b) Soit $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_{2n}$ est semblable à J .

Exercice 311*X 2007*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Montrer qu'elle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice 312*Mines 2019*

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que $I_n + N + \dots + N^{n-1}$ est inversible et calculer son inverse.

b) Montrer que $I_n + 2N + 3N^2 + \dots + nN^{n-1}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 313*Mines 2023*

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n . Montrer que N est semblable à N^T .

Exercice 314*X 2023*

Soit $n \geq 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, déterminer les valeurs possibles du cardinal de l'ensemble $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A = B^2\}$.

Exercice 315*X 2007*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

b) Trouver $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 316*X 2011*

Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et tel que : $\forall (M, N) \in \mathcal{A}^2, MN = 0 \Rightarrow M = 0$ ou $N = 0$.

a) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on avoir $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

b) On suppose que I_n appartient à $\mathcal{A}$. Montrer que toute matrice M non nulle de $\mathcal{A}$ est inversible et que son inverse est dans $\mathcal{A}$. Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathcal{A}$?

c) Donner un exemple d'un sous-espace $\mathcal{A}$ ne contenant pas l'identité.

Exercice 317*X 2016*

Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $A + Y {}^t X$ est inversible si et seulement si ${}^t X A^{-1} Y \neq -1$.

Exercice 318*Mines 2023*

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A + B & A - B \\ A - B & A + B \end{pmatrix}$. À quelle condition a-t-on M inversible ? Dans ce cas, déterminer M^{-1} .

Exercice 319*X 2011*

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont dans $\mathbb{N}$. Montrer que A est une matrice de permutation.

Exercice 320*X 2012*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$ si $i \leq j$, 0 sinon. Calculer A^{-1} .

Exercice 321*X 2015*

a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $ad - bc \neq 0$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Soit $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.

c) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ sont inversibles et que leurs inverses sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $A+5B$ est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 322  Centrale 2007 Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline B & I_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? b) Donner son inverse le cas échéant.

Exercice 323  X 2014

Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \text{diag}(1, 2, 3)$.

Exercice 324  Mines 2011 et 2012 et 2014 et 2017 et 2019 et 2021 et 2023, X 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + M^T = (\text{tr } M) A$.

Exercice 325  Mines 2022

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 0$.

Exercice 326  X 2022 Soit un entier $n \geq 2$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,i+1} = i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $m_{i+1,i} = n-i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et tous les autres coefficients sont nuls. Déterminer le rang de M .

Exercice 327  Mines 2021

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- (i) : il existe $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \varphi(\text{rg}(A))$;
(ii) : pour toutes matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : f(AB) \leq \min(f(A), f(B))$.
-

Exercice 328  Mines 2016

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right)$.

- a) Déterminer le rang de M .
b) Calculer M^{-1} lorsque M est inversible.
-

Exercice 329  X 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^{41} \neq M^{42}$ et $M^{42} = M^{43}$?

Exercice 330  Centrale 2008 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \leq n$. Montrer que A est de rang r si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, de rang r , telles que $A = BC$.

Exercice 331  Mines 2014

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1.
Montrer que : $A(\text{Im } B) \subset \text{Im } B$ ou $A(\text{Ker } B) \subset \text{Ker } B$.

Exercice 332  Mines 2009 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 = p$.

Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $B \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 333  X 2007 Soit E un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice inversible. On pose $r = \max\{\operatorname{rang} M, M \in E\}$. Montrer que $\dim E \leq n^2 - (n - r)^2 - 1$

Exercice 334  X 2012 Soit E de dim finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(u|_{\operatorname{Im} u})$.

Exercice 335  X 2011 et 2012, Centrale 2012, Mines 2023 Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Trace de Φ ?

Exercice 336  X 2009
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de $\Phi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soient $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Psi : X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA - AX \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de Ψ .

Exercice 337  X 2011, Mines et Centrale 2023 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
a) On pose $K_0 = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour, $r \in \{1, \dots, n-1\}$, $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $r \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_r^p = 0$.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(A)f(B)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

Exercice 338  Mines et X 2013 et 2015 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible.
a) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0$ et $BA = 0$?
b) Déterminer la dimension de $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA = 0\}$.

Exercice 339  X 2014 et 2022 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $\dim(\operatorname{Ker} N) = 1$. Déterminer les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = I_n + N$.

Exercice 340  Mines 2014, X 2018 Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose que $AA^T = sI_n + J$ avec $s \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que A est inversible.
b) Montrer que AJ est proportionnelle à J .
c) Montrer que JA est proportionnelle à J .
d) Montrer que A et A^T commutent.

Exercice 341  *X 2013* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, la matrice AN est nilpotente. Montrer que $A = \lambda I_n$.

Exercice 342  *X 2015 et 2017*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{S} = \{P^{-1}MP, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathcal{S} = \{\lambda_0 I_n\}$ avec $\lambda_0 \neq 0$ si et seulement si tout élément de $\mathcal{S}$ a tous ses coefficients diagonaux non nuls.

Exercice 343  *X 2012, Mines 2013* Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = 0\}$. Trouver le cardinal maximal des sous-ensembles de $\mathcal{S}$ ne possédant pas deux matrices semblables.

Exercice 344  *X 2013 et 2016*

Soit $A \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $M \in \mathcal{M}_{t,s}(\mathbb{R})$ telle que $A = AMA$. Y a-t-il unicité ?

Exercice 345  *Ens 2019*

Déterminer le nombre maximal de 1 dans une matrice inversible $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$.

Exercice 346  *X 2015*

a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$. On suppose $A^T A$ inversible. Comparer n et m .

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $B_1, \dots, B_m$ des parties distinctes de $\{1, \dots, n\}$. On suppose que : $\forall i \neq j, |B_i \cap B_j| = p$. Montrer que m est inférieur ou égal à n .

Exercice 347  *Mines 2022* Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. On suppose qu'il existe des matrices $P_1, P_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $AP_1 = P_2B$. Montrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $AQ = QB$.

Exercice 348  *X 2009* On se place dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On suppose donnés les coefficients des quatre bords d'une matrice : $a_{i,1}$ et $a_{i,p}$ pour $1 \leq i \leq n$; $a_{1,j}$ et $a_{n,j}$ pour $1 \leq j \leq p$.

Montrer qu'il existe une unique $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \{2, \dots, n-1\} \times \{2, \dots, p-1\}, a_{i,j} = \frac{1}{4} (a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}).$$

Exercice 349  *X 2023*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui n'est pas une homothétie.

On suppose que M est une matrice qui commute avec PAP^{-1} pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que M est une homothétie.

Même question pour A et M matrices réelles.

Exercice 350  *X 2012*

Soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ vérifiant $A^T A = rI_n$.

Soit d_n la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{C}_n$. Calculer d_1, d_2, d_3 .
