PC $\overset{\star}{2}$

Feuille d'exercices n° 5

MATRICES

« The Matrix is everywhere, it is all around us, even now in this very worksheet. »
Matrix, 1999., A. et L. Wachowski

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Soient A, B et C, trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A non nulle, alors $A \times B = A \times C$ implique $B = C$.	☐	☐
2	L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sev supplémentaires.	☐	☐
3	Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.	☐	☐
4	Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de rang 1.	☐	☐
5	Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de rang n.	☐	☐
6	Les matrices diagonales commutent avec toutes les matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	☐	☐
7	Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.	☐	☐
8	Pour toutes matrices A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.	☐	☐
9	Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.	☐	☐
10	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est nilpotente ssi A est triangulaire stricte.	☐	☐
11	Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi elles ont la même trace.	☐	☐
12	Si $A = \lambda I_n$ alors A est la seule matrice semblable à elle-même.	☐	☐
13	Si $A = \lambda I_n$ alors A est la seule matrice équivalente à elle-même.	☐	☐
14	La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.	☐	☐

Voici un système de hiérarchisation des exercices, en fonction de leur difficulté réelle ou supposée. Il faut garder à l'esprit que l'évaluation de la difficulté de chaque exercice est purement subjective et peut donc varier d'un individu (examinateur ou examiné) à l'autre. Le code retenu pour qualifier chaque exercice est le suivant :

— désigne un exercice proche du cours ou une application directe du cours, faisable avec une tétine dans la bouche.

— désigne un exercice qui mobilise relativement peu de neurones, faisable en buvant une bonne bière [1].

— désigne un exercice qui requiert une certaine dose d'ingéniosité.

— désigne un exercice retors, et qui, quand on l'a résolu, donne envie de faire un boeuf endiablé au saxophone.

— désigne un exercice méchant [2].

— désigne un exercice barge [2].

Les basiques

Exercice 257 *Mines 2023*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit f un automorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $K_x = \{f^n(x), \, n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = Id$.
Montrer, de plus, qu'il existe un polynôme annulateur de f de la forme $X^{k-p} - X^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 258 *Espci 2018*

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tels que $AB = 0$.
a) Montrer que $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leqslant n$. b) Caractériser l'égalité.

Exercice 259 *X 2016, Mines 2021*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $M^T\, M = M\, M^T$. Montrer que M est diagonale.

Exercice 260 *Centrale 2013*

Soit $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.
À quelle condition les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ sont-elles semblables ?

Exercice 261 *X 2017*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $Av = \lambda v$. Existe-t-il $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $Aw = \lambda w$?

---

1. Exercices à déguster avec modération.
2. à moins que ça ne soit l'examinateur.

Exercice 262 *Mines 2017*

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à sa transposée.

Exercice 263 *Centrale 2023*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs où les blocs non nuls sont de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 264 *Mines 2023*

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\ ;\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ f\left(A^T\right) = f(A)^T \right\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Les incontournables

Exercice 265 *Ens 2023*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Si $A + iB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
b) Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 266 *Matrices commutants avec toutes les autres*

On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ et l'exprimer en fonction des symboles de Kronecker.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, calculer $A \times E_{i,j}$ et $E_{i,j} \times A$.
3. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(K)$, $A \times M = M \times A$.
4. *X 2012* Déterminer $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telles que : $\forall M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, $AM = MA$.

Exercice 267 Soit D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts 2 à 2.
Déterminer le commutant de D : $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), DM = MD\}$.

Exercice 268

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $t \in \mathbb{K}^*$, on note D_t la matrice diagonale $D_t = \mathrm{diag}(1, t, t^2, ..., t^{n-1})$ de $D_n(\mathbb{K})$. On appelle classe de similitude de A, l'ensemble des matrices semblables à A.

1. Calculer $D_t^{-1} \times A \times D_t$.
2. Montrer que la classe de similitude de A est bornée si et seulement si A est une matrice d'homothétie.

Exercice 269 *Centrale 2009 et 2010, Mines 2018 et 2019*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle et telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 270 *X 2009, Centrale 2015, lemme d'Hadamard[3], matrices à diagonale dominante.*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 271 *Centrale 2008, 2009, 2013, X 2008, 2009, 2010, 2012, 2013, Ens 2012, Mines 2016, 2021, 2022*
Soit $\Phi \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\right)$.
a) On suppose que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\Phi(AB) = \Phi(BA)$. Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.
b) On suppose que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, $\Phi\left(P^{-1}AP\right) = \Phi(A)$. Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.

Exercice 272 *Mines 2023*
On considère $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$.
a) Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice dans la base canonique de l'induit de D sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par D.
b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $F \subset \mathbb{R}_n[X]$, $R \in F$ et R de degré n.
c) Montrer que $\left(D^i(R)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre.
d) Montrer que $F = \mathbb{R}_n[X]$.
e) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie stables par D.

Exercice 273 a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire $A = C \times L$ où C est une matrice colonne non nulle et L une matrice ligne non nulle.
b) Donner un résultat analogue pour les matrices de rang 2.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Calculer A^p.

Exercice 274 *Mines 2011, 2014, 2015, 2016, 2022 et 2023, Centrale 2022*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + (\operatorname{tr} M)\, A = B$.

Exercice 275 *Centrale 2010, 2018 et 2022, Ens 2017, Mines 2019*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $M \neq \lambda I_n$) et telle que $\operatorname{tr} M = 0$

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne X_1 telle que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.
2. En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $\operatorname{tr} M_1 = 0$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

---

3. Jacques Salomon Hadamard, (1865 Versailles - 1962 Paris), mathématicien français.

4. Montrer qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.
5. Cas général : montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.

Exercice 276 *Mines 2016*

Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 277 *X 2015, Mines 2007, 2014, 2019, 2021, 2023, Centrale 2023*

a) Montrer que les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$ sont les applications de la forme $\varphi : A \to \mathrm{tr}(AM)$, où $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

b) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.

Exercice 278 *Centrale 2011, Mines 2018*

a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_n$.

Montrer que A est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

b) Soit $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_{2n}$ est semblable à J.

Les autres

Exercice 279 *X 2016*

Soient S et P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2 = P$, $S^2 = I_n$ et $(S-P)(S+P) = 0$. Montrer que $P = I_n$.

Exercice 280 *X 2020*

On considère $F : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} \cos a + \cos b & \sin a - \sin b \\ -\sin a - \sin b & \cos a - \cos b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer l'image de F.

Exercice 281 *X 2014*

Soient $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ Mx = \lambda x\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.

Exercice 282 Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec J avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.

Exercice 283 *Mines 2018* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n-1$. Montrer que $I_n + A$ et $(I_n + A)^{-1}$ sont semblables.

Exercice 284 *Mines 2008, 2009, 2011 et 2023*
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \mathrm{Diag}(0,1,1)$. Déterminer BA.

Exercice 285 *X 2021 et 2022*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ et $A^2B = A$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A^2)$.
b) Montrer que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(B) \oplus \mathrm{Ker}(B)$.
c) Montrer que $B^2A = B$.

Exercice 286 *X 2014, Centrale 2016, Mines 2019*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0$. Que peut-on dire de $BABA$?

Exercice 287 *X 2007* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Montrer qu'elle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice 288 *X 2016*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(M) = 0$.
Montrer qu'il existe $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ tels que $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (A_iB_i - B_iA_i)$.

Exercice 289 *Mines 2023*
Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n. Montrer que N est semblable à N^T.

Exercice 290 *X 2023*
Soit $n \geqslant 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, déterminer les valeurs possibles du cardinal de l'ensemble $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A = B^2\}$.

Exercice 291 *X 2008* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a équivalence entre :
$\exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ A = \lambda I_n \iff \forall (N, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ A = MN \Rightarrow A = NM$.

Exercice 292 *X 2011* Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et tel que : $\forall (M,N) \in \mathcal{A}^2$, $MN = 0 \Rightarrow M = 0$ ou $N = 0$.
a) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on avoir $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
b) On suppose que I_n appartient à $\mathcal{A}$. Montrer que toute matrice M non nulle de $\mathcal{A}$ est inversible et que son inverse est dans $\mathcal{A}$. Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathcal{A}$?
c) Donner un exemple d'un sous-espace $\mathcal{A}$ ne contenant pas l'identité.

Exercice 293 *X 2016* Soient $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que $A + Y\,{}^tX$ est inversible si et seulement si ${}^tXA^{-1}Y \neq -1$.

Exercice 294 *Mines 2023*
Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$. À quelle condition a-t-on M inversible ? Dans ce cas, déterminer M^{-1}.

Exercice 295 *X 2011* Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont dans $\mathbb{N}$. Montrer que A est une matrice de permutation.

Exercice 296 *X 2012*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \dbinom{j}{i}$ si $i \leqslant j$, 0 sinon. Calculer A^{-1}.

Exercice 297 *Ens 2024*
On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :
(i) A est monotone, c'est-à-dire A est inversible et A^{-1} positive,
(ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $AX \geqslant 0 \Rightarrow X \geqslant 0$.

Exercice 298 *Ens 2024*
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in E$, $\mathrm{rg}\,(A) \leqslant 1$. Montrer que $\dim(E) \leqslant n$.

Exercice 299 *X 2015*
a) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $ad - bc \neq 0$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
b) Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.
c) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$ sont inversibles et que leurs inverses sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $A+5B$ est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 300 *Centrale 2007* Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline B & I_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? b) Donner son inverse le cas échéant.

Exercice 301 *Mines 2011 et 2012 et 2014 et 2017 et 2019 et 2021 et 2023 et 2024, X 2017*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + M^T = (\operatorname{tr} M)\ A$.

Exercice 302 *X 2022* Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,i+1} = i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $m_{i+1,i} = n - i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, et tous les autres coefficients sont nuls. Déterminer le rang de M.

Exercice 303 *Mines 2021*
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
(i) : il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = \varphi(\operatorname{rg}(A))$;
(ii) : pour toutes matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f(AB) \leqslant \min\left(f(A), f(B)\right)$.

Exercice 304 *Centrale 2008* Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \leqslant n$. Montrer que A est de rang r si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, de rang r, telles que $A = BC$.

Exercice 305 *Mines 2008 et 2011*
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\operatorname{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Exercice 306 *Mines 2014*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1.
Montrer que : $A(\operatorname{Im} B) \subset \operatorname{Im} B$ ou $A(\operatorname{Ker} B) \subset \operatorname{Ker} B$.

Exercice 307 *Mines 2009* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 = p$.
Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $B \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 308 *X 2007* Soit E un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice inversible. On pose $r = \max\{\operatorname{rang} M,\ M \in E\}$. Montrer que $\dim E \leqslant n^2 - (n-r)^2 - 1$

Exercice 309 *X 2011 et 2012, Centrale 2012, Mines 2023*
Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Trace de Φ ?

Exercice 310 *X 2009*
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de $\Phi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soient $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques,
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Psi : X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA - AX \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de Ψ.

Exercice 311 *X 2017* Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
Soit Φ un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(AB) = \Phi(A)\,\Phi(B)$.
a) Déterminer $\Phi(I_n)$.
b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $\Phi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1.
c) Soit $U_i \in \operatorname{Im}\Phi(E_{i,1}) \setminus \{0\}$. Montrer que $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 312 *X 2011, Mines et Centrale 2023* Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) On pose $K_0 = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour, $r \in \{1, \dots, n-1\}$, $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $r \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_r^p = 0$.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(A)f(B)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

Exercice 313 *X 2015*
Condition sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$?

Exercice 314 *X 2014 et 2022* Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $\dim(\operatorname{Ker} N) = 1$.
Déterminer les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = I_n + N$.

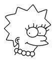
Exercice 315 *Mines 2014, X 2018*
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose que $A\,A^T = sI_n + J$ avec $s \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que A est inversible.
b) Montrer que AJ est proportionnelle à J.
c) Montrer que JA est proportionnelle à J.
d) Montrer que A et A^T commutent.

Exercice 316 *X 2016 et Mines 2022*
Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ linéaire telle que, pour toute matrice N nilpotente, on ait $F(N) + {}^tF(N) = 0$.
Montrer que le rang de F est inférieur ou égal à 2.

Exercice 317 *X 2012, Mines 2013* Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ M^2 = 0\}$. Trouver le cardinal maximal des sous-ensembles de $\mathcal{S}$ ne possédant pas deux matrices semblables.

Exercice 318 *X 2013 et 2016*
Soit $A \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $M \in \mathcal{M}_{t,s}(\mathbb{R})$ telle que $A = AMA$. Y a-t-il unicité ?

Exercice 319  *X 2013* Soit $M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont non nuls. Montrer que M^{-1} a au plus $n^2 - 2n$ coefficients nuls.

Exercice 320  *X 2020*

Soient $n \geqslant 2$,

$$\mathcal{E} = \left\{ M = ((m_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{F} = \left\{ A = ((a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
b) Soit $A \in \mathcal{F}$. On suppose que A possède au moins $2n$ coefficients non nuls. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{E}$ non nulle et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon], tM + A \in \mathcal{F}$.

Exercice 321  *X 2009* On se place dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On suppose donnés les coefficients des quatre bords d'une matrice : $a_{i,1}$ et $a_{i,p}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; $a_{1,j}$ et $a_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$.
Montrer qu'il existe une unique $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall (i,j) \in \{2, \ldots, n-1\} \times \{2, \ldots, p-1\},\ a_{i,j} = \dfrac{1}{4}\left(a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}\right)$.

Exercice 322  *X 2023*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui n'est pas une homothétie.
On suppose que M est une matrice qui commute avec PAP^{-1} pour tout $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$.
Montrer que M est une homothétie.
Même question pour A et M matrices réelles.

Exercice 323  *X 2007, Mines 2008 et 2009*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathbb{C}$ distincts tels que :
$\forall i \in \{1, \ldots, n+1\},\ A + \lambda_i B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.
