PC $\overset{\star}{2}$

Feuille d'exercices n° 4 : Algèbre Linéaire

« For a smart material to be able to send out a more complex signal it needs to be nonlinear. If you hit a tuning fork twice as hard it will ring twice as loud but still at the same frequency. That's a linear response. If you hit a person twice as hard they're unlikely just to shout twice as loud. That property lets you learn more about the person than the tuning fork. » *When Things Start to Think, 1999.*, Neil Gershenfeld

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Soient F et G deux sev de E supplémentaires, soit $x \in E$, alors $x \notin F \Longrightarrow x \in G$.	☐	☐
2	Si $(x_1, ..., x_n)$ sont n vecteurs de E qui ne sont pas colinéaires 2 à 2 alors cette famille est libre.	☐	☐
3	La réunion de deux sev en est un .	☐	☐
4	Soient F et G deux sev de E, $F + G = F \Longrightarrow G = \{O_E\}$.	☐	☐
5	Soient A et B deux parties de E, alors $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.	☐	☐
6	Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u injective $\Longrightarrow u$ bijective .	☐	☐
7	En dimension finie, une application linéaire injective est bijective.	☐	☐
8	Si p et q sont des projecteurs alors $p + q$ en est un aussi.	☐	☐
9	Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est un projecteur $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$.	☐	☐
10	Soient F et G deux sev supplémentaires de E, soit H un sev de E. Alors $F \cap H$ et $G \cap H$ sont des sev supplémentaires de H.	☐	☐
11	Soit $A \subset E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Vect}(u(A)) = u(\mathrm{Vect}(A))$.	☐	☐
12	Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F et G deux sev de E alors $u(F + G) = u(F) + u(G)$.	☐	☐
13	Soient u et $v \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.	☐	☐
14	Soient u et $v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = O_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow u = O_{\mathcal{L}(E)}$ ou $v = O_{\mathcal{L}(E)}$.	☐	☐

Les basiques

Exercice 201 *X 2012, Centrale 2014, Mines 2024* Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si v est surjective, u est injective et $\mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, u = F$.

Exercice 202 *Mines 2024*
Soient $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : P \in E \mapsto P - P'$.
a) Montrer que φ est bijectif de deux manières différentes.
b) Soit Q l'antécédent de P par φ. On suppose que $Q \geqslant 0$. Montrer que $P \geqslant 0$. Exprimer P en fonction de Q.

Exercice 203 *X 2016 et 2018, Mines 2016, 2017, 2019 et 2023*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 204 *Mines 2013*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les vecteurs $u \in E$ tels qu'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que $u = e_1 + ... + e_n$?

Exercice 205 *Mines 2022*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un automorphisme de E tel que pour tout $x \in E$ $K_x = \{f^n(x)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = Id$. Que peut-on dire si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie cette condition ?

Les incontournables

Exercice 206 Soit E un K.e.v. Déterminer $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E$, la famille $(f(x), x)$ soit liée.

Exercice 207 *Mines 2005, 2018 et Centrale 2006* Soit E un K.e.v. de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E), f \circ u = u \circ f$ (On dit que f est dans le centre de $\mathcal{L}(E)$).

1. Montrer que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (Indication : on pourra considérer le projecteur p sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$).
2. En déduire que f est une homothétie.
3. Chercher les endomorphismes f qui commutent avec toutes les symétries de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 208 *X 2013, Mines 2018 et 2019 et 2021*
Soit E un K.e.v. de dimension finie égale à n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente. Soit p l'indice de nilpotence.
On pose $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
b) En déduire que l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à $\dim E$.
c) On suppose $p = n = \dim E$. Montrer que $(Id_E, u, ..., u^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(u)$.

Exercice 209 *X et Centrale 2010, Centrale 2012, X 2014 et 2016*
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{H} = \{g \in \mathcal{L}(F, E),\ f \circ g \circ f = 0\}$.

1. Si f est un isomorphisme, montrer que $\mathcal{H} = \{0\}$.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}$.

Exercice 210 *X 2015, Mines 2015 et 2022* Soient E un K espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E. À quelle condition F et G possèdent-ils un supplémentaire commun ?

Exercice 211 *X 2008, 2010 et 2017, Centrale 2010, Mines 2011 et 2012 : Lemme de factorisation*
Soient E, F et G trois K.e.v. de dimension finie et soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$, $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\exists k \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $u = k \circ v \Leftrightarrow \text{Ker}\, v \subset \text{Ker}\, u$.
2. Montrer que $\exists k' \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = w \circ k' \Leftrightarrow \text{Im}\, u \subset \text{Im}\, w$.

Exercice 212 *Mines 2024*
Soit E un K.e.v de dimension n. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)^2$.
Montrer que $\text{rang}\, f + \text{rang}\, g - n \leqslant \text{rang}(f \circ g) \leqslant \inf(\text{rang}\, f, \text{rang}\, g)$.

Exercice 213 *Mines 2013, X 2012, 2016, 2024* Soit E un $\mathbb{K}$ e.v.
Montrer que l'union de n s.e.v. de E en est un si et seulement si l'un d'entre eux contient tous les autres.

Exercice 214 *Mines 2010, X et Mines 2011*
Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $\Phi - Id$ est nilpotent.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n. Montrer que $(P, \Phi(P), \dots, \Phi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant p$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p$.

Exercice 215 *Mines 2019*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.
b) Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $f^2 + Id = 0$.
On suppose dans la suite que $f^2 + Id = 0$.
c) Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
d) Soit $(x,y) \in E^2$. On suppose que $(x, f(x), y)$ est libre. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
e) Si E est de dimension finie, que peut-on dire de sa dimension ?

Exercice 216 *Centrale 2012, Mines 2017*
Soit E espace vectoriel de dimension n . Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, nilpotente et tel que $\operatorname{rg}(u) = n-1$.
a) Soit F un sev de E stable par u. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset F$ et que $\dim(u(F)) = \dim(F) - 1$.
b) Montrer que $\dim(ker(u^k)) = k$ pour $k \in \{1, ..., n\}$.
c) Déterminer tous les sev stable par u.

Exercice 217 *X 2011* Soit E K.e.v de dimension finie.
Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E.

Exercice Supplémentaire

Soit E un K.e.v. de dimension finie. Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E non triviaux.
Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F et soit a un vecteur de G.

1. Montrer que $F_a = \operatorname{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)$ est un supplémentaire de G.
2. En déduire que G admet une infinité de supplémentaires.

Les autres

Exercice 218 *Mines 2022*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
a) Soit f, g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe un projecteur p de E et un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $g = \lambda p$. Montrer que si f stabilise $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ alors f commute avec g.
b) Le résultat précédent tient-il sans l'hypothèse particulière effectuée sur g ?
c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(x) \in \operatorname{Vect}(x)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que u est une homothétie.
d) Soit g un endomorphisme de E. On suppose que g commute avec tout endomorphisme de E qui stabilise $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$. Montrer que g est produit d'un projecteur par un scalaire non nul.

Exercice 219 *Mines 2016*
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0\}$.
a) Pour $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$, montrer que $\operatorname{Ker}(u - av) \cap \operatorname{Ker}(u - bv) = \{0\}$.
b) Si $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires distincts, montrer que la somme des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(u - a_k v)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ est directe.

Exercice 220 *X 2014, 2018* Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension k. On voit les u_i comme vecteurs de $\mathbb{C}^n$.
Que peut-on dire de la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(u_1, \dots, u_p)$?

Exercice 221 *Mines 2018*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - Id = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + Id) = E$.

Exercice 222 *Mines 2022*
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(P(X + a_0), \dots, P(X + a_n))$ soit libre.

Exercice 223 *X 2008* Soient P_1, P_2, P_3, P_4 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

1. On suppose que : $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?
2. On suppose que : $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

Exercice 224 Etudier la liberté des familles suivantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
a/ $\{f_\alpha : x \longrightarrow e^{\alpha x}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. b/ $\{f_\alpha : x \longrightarrow |x - \alpha|\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$.
c/ $\{f_n : x \longrightarrow \cos nx\}_{n \in \mathbb{Z}}$. d/ $\{f_n : x \longrightarrow \sin nx\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exercice 225 *Mines 2008, 2010 et 2012* Soient $(a_1, \dots, a_n)$ des réels > 0 deux à deux distincts.
Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^2 + {a_i}^2}$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est-elle libre ?

Exercice 226 *X 2017*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
Déterminer s'il existe une famille commutative $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ et une famille $(v_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs non nuls de E tels que :
(i) $\forall (n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f_n(v_r) = v_{r+n}$.
(ii) $\forall n \geq 1$, $(f_n - 2^n Id)^2 = 0$.
(iii) $f_1 \neq 2Id$.

Exercice 227 *X 2011* Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, F un K-espace vectoriel de dimension p, $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
a)Montrer que la famille $(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$ est libre.
b) Donner une base de $E \times F$ ainsi que sa dimension.
c) Soit G le sous-espace de $E \times F$ engendré par les (e_i, f_j) pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$.
Déterminer la dimension de G.

Exercice 228 *X 2012* Soient E un espace vectoriel de dimension finie, a et b dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer : $\dim(\mathrm{Ker}(a \circ b)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, a) + \dim(\mathrm{Ker}\, b)$.

Exercice 229 *X 2012* Soient E un K.e.v de dimension $n \geqslant 2$ et F un sous-espace strict de E.
Déterminer les formes linéaires $\varphi \in E^*$ nulles sur $E \setminus F$.

Exercice 230 *X 2017* Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^6$, chacun de dimension 4.
Est-ce que $E \cap F$ peut être une droite vectorielle ?

Exercice 231 *X 2013, Mines 2014*
Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ avec $0\leqslant p\leqslant n$, E un espace de dimension n.
Déterminer $\min\{\dim(H_1\cap\cdots\cap H_p)\,,\ H_1,\ldots,H_p \text{ hyperplans de } E\}$.

Exercice 232 *Mines 2009*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f_1,\ldots,f_p$ des formes linéaires sur E.
Montrer que $(f_1,\ldots,f_p)$ est libre si et seulement si : $\forall(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$, $\exists x\in E$, $\forall i\in\{1,\ldots,p\}$, $f_i(x)=\lambda_i$.

Exercice 233 *Mines 2023*
Soient $v\in\mathcal{L}(E,G)$ et $f\in\mathcal{L}(F,G)$, où E,F,G sont des K-ev de dimensions arbitraires
a) Montrer que $\operatorname{Im} v\subset\operatorname{Im} f$ si et seulement si il existe $u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que $v=f\circ u$.
b) Soient $f_1,\cdots,f_k\in\mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que $\operatorname{Im} v\subset\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Im} f_i$ si et seulement si $\exists\,(u_1,...,u_k)\in\mathcal{L}(F,G)^k$, $v=\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i\circ u_i$.

Exercice 234 *Mines 2022*
Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et E_p l'ensemble des suites complexes qui sont p-périodiques.
a)Montrer que E_p est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
b) Déterminer une base de E_p formée de suites géométriques.

Exercice 235 *Mines 2022 et 2024*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $u,v\in\mathcal{L}(E)$, de même rang et tels que $u^2\circ v=u$.
a) Montrer que $v\circ u\circ v=v$.
b) Montrer que $u\circ v$ est un projecteur.
c) Montrer que $u\circ v\circ u=u$, et en déduire que $v^2\circ u=v$.

Exercice 236 *Mines 2019*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.
On suppose que $f+g=Id$ et $\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)\leqslant\dim E$.
a) Montrer que $\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=E$.
b) Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 237 *Mines 2017*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$.
a) Soit $p\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que, si p est un projecteur, $\operatorname{tr}(p)=\operatorname{rg}(p)$. La réciproque est-elle vraie ?
b) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $u^m=Id$. Montrer que $p=\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}u^k$ est un projecteur.
c) Montrer que $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{tr}(u^k)=\dim\operatorname{Ker}(u-Id)$.

Exercice 238 *Mines 2024*
Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.
a) Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\varphi_\sigma: s\mapsto s\circ\sigma$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
b) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E défini par $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $f_\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$. On pose $p_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}f_\sigma$. Montrer que p_n est un projecteur et expliciter son image et son noyau.

Exercice 239 *X 2014* Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux projecteurs tels que l'endomorphisme $Id - u - v$ soit inversible. Montrer que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$.

Exercice 240 *Mines 2012* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f \circ f = 0$ si et seulement s'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = f \circ p - p \circ f$.

Exercice 241 *X 2011* Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire de $\{0_E\} \times F$ de $E \times F$ est de la forme : $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 242 *Centrale 2017*
Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.
a) On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $au + bv$ soit dans GL(E). Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.
b) On suppose que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$. Existe-t-il toujours $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $au + bv$ soit dans GL(E) ?
c) On suppose que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$ et que $u \circ v = v \circ u$. Existe-t-il toujours $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $au + bv$ soit dans GL(E) ?

Exercice 243 *X 2012, Centrale 2014*
Soient E, F, G, 3 $\mathbb{K}$.e.v. de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$ si et seulement si $F = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} v$.

Exercice 244 *X 2012*
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, A et B deux sous-espaces de E tels que $A + B = E$. Déterminer la dimension du sous-espace L de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes stabilisant A et B.

Exercice 245 *Centrale 2014*
Soit $\delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X + 1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que δ est linéaire ; déterminer son image et son noyau.
b) Montrer l'existence et l'unicité d'une base $(H_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que : $H_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = \delta(H_{n+1})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(0) = 0$.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que : $P = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \delta^k(P)(0)\, H_k$.
d) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

Exercice 246 *X 2023* Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$ qui commutent avec l'endomorphisme $T : P\left(X\right) \mapsto P\left(X + 1\right)$.

Exercice 247 *X 2007* Soit E un K-ev de dimension n et $(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$ avec w inversible.

1. si u et w commutent, montrer que que u et w^{-1} commutent.
2. Si $u \circ v + u + v = 0$, montrer que u et v commutent.

Exercice 248 *Mines 2010 et 2024*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme nilpotent tel que tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u. Montrer que u est l'endomorphisme nul.

Exercice 249 Soit E un K.e.v. et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $v \longmapsto u \circ v$.
Montrer que $\varphi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et que φ_u est nilpotente $\Leftrightarrow$ u nilpotente .

Exercice 250 *Mines 2016, 2017*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g dans $\mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) = \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Exercice 251 *Mines 2021 et 2023*
Soient E un $\mathbb{R}$ev et $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme surjectif dont le noyau est une droite vectorielle.
a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme si $E = \mathbb{R}[X]$.
b) L'espace E peut-il être de dimension finie ?
c) Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = v$.

Exercice 252 *X 2016*
Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ u \neq u$ et $u \circ u \circ u = u \circ u$.

Exercice 253 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que tout endomorphisme peut s'écrire comme la différence de deux automorphismes.

Exercice 254 *X 2008 MP*
Soient $I_0, \ldots, I_n$ des segments de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ non nul tel que : $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\displaystyle\int_{I_k} P(t)dt = 0$. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 255 *X 2015*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -Id$. Montrer que E est de dimension paire et qu'il n'existe pas d'hyperplan stable par u.

Exercice 256 *X 2024*
Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \mapsto F$ est dite antilinéaire si $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x+\lambda y) = f(x)+\overline{\lambda} f(y)$ Pour quels entiers n existe-t-il $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ antilinéaire telle que $f \circ f = -Id$?
