PC $\overset{\star}{2}$ **Feuille d'exercices n° 4 : Algèbre Linéaire**

« For a smart material to be able to send out a more complex signal it needs to be nonlinear. If you hit a tuning fork twice as hard it will ring twice as loud but still at the same frequency. Thats a linear response. If you hit a person twice as hard theyre unlikely just to shout twice as loud. That property lets you learn more about the person than the tuning fork. » *When Things Start to Think, 1999.*, Neil Gershenfeld

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Soient F et G deux sev de E supplémentaires, soit $x \in E$, alors $x \notin F \Longrightarrow x \in G$.	☐	☐
2	Si $(x_1, ..., x_n)$ sont n vecteurs de E qui ne sont pas colinéaires 2 à 2 alors cette famille est libre.	☐	☐
3	La réunion de deux sev en est un .	☐	☐
4	Soient F et G deux sev de E, $F + G = F \Longrightarrow G = \{O_E\}$.	☐	☐
5	Soient A et B deux parties de E, alors $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.	☐	☐
6	Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u injective $\Longrightarrow u$ bijective .	☐	☐
7	En dimension finie, une application linéaire injective est bijective.	☐	☐
8	Si p et q sont des projecteurs alors $p + q$ en est un aussi.	☐	☐
9	Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est un projecteur $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$.	☐	☐
10	Soient F et G deux sev supplémentaires de E, soit H un sev de E. Alors $F \cap H$ et $G \cap H$ sont des sev supplémentaires de H.	☐	☐
11	Soit $A \subset E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Vect}(u(A)) = u(\mathrm{Vect}(A))$.	☐	☐
12	Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F et G deux sev de E alors $u(F + G) = u(F) + u(G)$.	☐	☐
13	Soient u et $v \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.	☐	☐
14	Soient u et $v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = O_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow u = O_{\mathcal{L}(E)}$ ou $v = O_{\mathcal{L}(E)}$.	☐	☐

Les basiques

Exercice 214 *Mines 2023*
Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel, p_1 et p_2 deux projecteurs de E. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

Exercice 215  *Mines 2022*
Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, et f, g deux endomorphismes de E tels que $u = f + g$, $f^2 = 0$ et $g^2 = 0$.
a) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, f \geqslant (\dim E)/2$.
b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 216 *X 2016 et 2018, Mines 2016, 2017, 2019 et 2023*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\mathrm{rg}\, u^2 = \mathrm{rg}\, u \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Exercice 217 *X 2016 et 2020, Mines 2022*
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $x \in E$ et $y \in F$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 218 *X 2021* Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{R}[X]$, on définit l'application

$$f_P : Q \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)} \in \mathbb{R}[X]$$

a) À quelle condition sur le polynôme P l'application f_P est-elle un isomorphisme ?
b) L'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}[X]),\ P \mapsto f_P$ est-elle un isomorphisme ?

Exercice 219 *X 2016 et 2021, Mines 2022*
a) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un automorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = Id_E$.
b) On reprend la même question mais sans supposer que f est bijectif. Montrer qu'il existe $k, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{k+p} = f^k$.

Exercice 220 *Mines 2023*
Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.
On note p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F. Montrer que $q \circ f \circ p = 0$ si et seulement si $f(F) \subset F$.

Exercice 221 *X 2016*
Soient $E = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P'(0) = 0\}$ et $f : P \in E \mapsto P(X+1) - 2\,P(X) + P(X-1)$. Montrer que f est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

Les incontournables

Exercice 222 Soit E un K.e.v. Déterminer $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E$, la famille $(f(x), x)$ soit liée.

Exercice 223 *Mines 2005, 2018 et Centrale 2006* Soit E un K.e.v. de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E), f \circ u = u \circ f$ (On dit que f est dans le centre de $\mathcal{L}(E)$).

1. Montrer que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (Indication : on pourra considérer le projecteur p sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$).
2. En déduire que f est une homothétie.
3. Chercher les endomorphismes f qui commutent avec toutes les symétries de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 224 *X 2013, Mines 2018 et 2019 et 2021*
Soit E un K.e.v. de dimension finie égale à n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente. Soit p l'indice de nilpotence.
On pose $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
b) En déduire que l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à $\dim E$.
c) On suppose $p = n = \dim E$. Montrer que $(Id_E, u, ..., u^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(u)$.

Exercice 225 *X et Centrale 2010, Centrale 2012, X 2014 et 2016*
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{H} = \{g \in \mathcal{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0\}$.

1. Si f est un isomorphisme, montrer que $\mathcal{H} = \{0\}$.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}$.

Exercice 226 *Mines 2012* Soient E un espace de dimension n, p et q deux projecteurs de E.
Montrer que p et q ont même rang si et seulement s'il existe $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $p = u \circ v$ et $q = v \circ u$.

Exercice 227 *X 2015, Mines 2015 et 2022* Soient E un K espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E. À quelle condition F et G possèdent-ils un supplémentaire commun ?

Exercice 228 *X 2008, 2010 et 2017, Centrale 2010, Mines 2011 et 2012 : Lemme de factorisation*
Soient E, F et G trois K.e.v. de dimension finie et soient $u \in \mathcal{L}(E,G)$, $v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $w \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\exists k \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $u = k \circ v \Leftrightarrow \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$.
2. Montrer que $\exists k' \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $u = w \circ k' \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} w$.

Exercice 229 Soit E un K.e.v de dimension n. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)^2$.
Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - n \leqslant \operatorname{rang}(f \circ g) \leqslant \inf(\operatorname{rang} f, \operatorname{rang} g)$.

Exercice 230 *Noyaux et Images itérés (Mines 2016)* Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite des s.e.v. $\operatorname{Ker}(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et que la suite des s.e.v. $\operatorname{Im}(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. Donner des exemples où ces suites sont strictement monotones.
3. Montrer que si $\exists p \in \mathbb{N}$, tel que $\operatorname{Im}(u^p) = \operatorname{Im}(u^{p+1})$ alors la suite des images est constante à partir de ce rang. L'espace auquel elle est égale s'appelle *le coeur de f* .
4. Montrer que si $\exists p \in \mathbb{N}$, tel que $\operatorname{Ker}(u^p) = \operatorname{Ker}(u^{p+1})$ alors la suite des noyaux est constante à partir de ce rang. L'espace auquel elle est égale s'appelle *le nilespace de f*.
5. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les suites des noyaux et des images sont toujours stationnaires, et ce à partir d'un même rang r, (appelé *indice* de f). Montrer que le coeur et le nilespace sont supplémentaires.
6. On pose $n = \dim E$. Montrer que $r \leqslant n$.

Exercice 231 *X 2012, Mines 2013, X 2016* Soit E un $\mathbb{K}$ e.v.
Montrer que l'union de n s.e.v. de E en est un si et seulement si l'un d'entre eux contient tous les autres.

Exercice 232 *Mines 2010, X et Mines 2011*
Soient $E = K[X]$, $u : P \in E \mapsto P(X+1)$ et $v = u - Id$.

1. Montrer que v est un endomorphisme de E. Exprimer $v^n(P)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in K[X]$.
2. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant p+1$. Montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0$.

Exercice 233 *Centrale 2012, Mines 2017*
Soit E espace vectoriel de dimension n . Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, nilpotente et tel que $\operatorname{rg}(u) = n-1$.
a) Soit F un sev de E stable par u. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset F$ et que $\dim(u(F)) = \dim(F) - 1$.
b) Montrer que $\dim(ker(u^k)) = k$ pour $k \in \{1, ..., n\}$.
c) Déterminer tous les sev stable par u.

Exercice 234 *X 2011* Soit E K.e.v de dimension finie.
Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E.

Exercice Supplémentaire

Soit E un K.e.v. de dimension finie. Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E non triviaux.
Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F et soit a un vecteur de G.

1. Montrer que $F_a = \text{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ est un supplémentaire de G.
2. En déduire que G admet une infinité de supplémentaires.

Les autres

Exercice 235 *Mines 2016*
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0\}$.
a) Pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$, montrer que $\text{Ker}(u - av) \cap \text{Ker}(u - bv) = \{0\}$.
b) Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des scalaires distincts, montrer que la somme des sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - a_k v)$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ est directe.

Exercice 236 *X 2014, 2018* Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, \ldots, u_p)$ est de dimension k. On voit les u_i comme vecteurs de $\mathbb{C}^n$.
Que peut-on dire de la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(u_1, \ldots, u_p)$?

Exercice 237 *Mines 2018*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - Id = 0$.
Montrer que $\text{Ker}(u - Id) \oplus \text{Ker}(u^2 + Id) = E$.

Exercice 238 *X 2018* Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(V)$ tels que les seuls sous-espaces stables à la fois par a et par b soient $\{0\}$ et V.
On considère $u \in \mathcal{L}(V)$ non nul qui commute avec a et b. Montrer que u est inversible.

Exercice 239 *X 2014, Mines 2019*
Soit E un K.e.v. de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim \text{Ker}\, f \leqslant \dim \text{Ker}\, f^2 \leqslant 2 \dim \text{Ker}\, f$.

Exercice 240 *X 2012* Soient E un espace de dimension $n \geqslant 2$ et H un hyperplan de E.
Soit $X = (E \backslash H) \cup \{0\}$. L'ensemble X est-il un espace vectoriel ? Que vaut $\text{Vect}\, X$?

Exercice 241 *Mines 2022*
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(P(X + a_0), \ldots, P(X + a_n))$ soit libre.

Exercice 242 *X 2008* Soient P_1, P_2, P_3, P_4 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

1. On suppose que : $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?
2. On suppose que : $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

Exercice 243 Etudier la liberté des familles suivantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
a/ $\{f_\alpha : x \longrightarrow e^{\alpha x}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. b/ $\{f_\alpha : x \longrightarrow |x - \alpha|\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$.
c/ $\{f_n : x \longrightarrow \cos nx\}_{n \in \mathbb{Z}}$. d/ $\{f_n : x \longrightarrow \sin nx\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exercice 244 *X 2010 et 2012*
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 2\pi[$ distincts et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k = x \mapsto e^{i\lambda_k x}$.
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

.

Exercice 245 *X 2017*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
Déterminer s'il existe une famille commutative $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ et une famille $(v_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs non nuls de E tels que :
(i) $\forall (n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f_n(v_r) = v_{r+n}$.
(ii) $\forall n \geq 1$, $(f_n - 2^n Id)^2 = 0$.
(iii) $f_1 \neq 2Id$.

Exercice 246 *X 2009* Soient E un K-e.v. de dimension n et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ dans $\mathcal{L}(E)$.
On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\text{rg}(\varphi_i) = 1$ et $\varphi_i \circ \varphi_i \neq 0$; $\forall i \neq j$, $\varphi_i \circ \varphi_j = 0$. Montrer que $p \leqslant n$.

Exercice 247 *X 2012* Soient E un espace vectoriel de dimension finie, a et b dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer : $\dim(\text{Ker}(a \circ b)) \leqslant \dim(\text{Ker}\, a) + \dim(\text{Ker}\, b)$.

Exercice 248 *Mines 2014*
Soient $n \geqslant 2$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle et $H = \text{Ker}\, \Phi$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que f stabilise H si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

Exercice 249 *X 2012* Soient E un K.e.v de dimension $n \geqslant 2$ et F un sous-espace strict de E.
Déterminer les formes linéaires $\varphi \in E^*$ nulles sur $E \setminus F$.

Exercice 250 *X 2017*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, i et j deux entiers compris entre 1 et n tels que $i + j - 1 \leq n$. Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ trois bases de $\mathbb{R}^n$.
On pose $E = \text{vect}(e_i, \dots, e_n)$, $F = \text{vect}(f_j, \dots, f_n)$ et $G = \text{vect}(g_1, \dots, g_{i+j-1})$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul dans l'intersection de E, F et G.

Exercice 251 *X 2013, Mines 2014*
Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$, E un espace de dimension n.
Déterminer $\min \{\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p),\ H_1, \dots, H_p \text{ hyperplans de } E\}$.

Exercice 252 *Mines 2023*
Soient $v \in \mathcal{L}(E, G)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$, où E, F, G sont des K-ev de dimensions arbitraires
a) Montrer que $\text{Im}\, v \subset \text{Im}\, f$ si et seulement si il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $v = f \circ u$.
b) Soient $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $\text{Im}\, v \subset \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \text{Im}\, f_i$ si et seulement si $\exists\, (u_1, ..., u_k) \in \mathcal{L}(F, G)^k$, $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i \circ u_i$.

Exercice 253 *Mines 2022*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, de même rang et tels que $u^2 \circ v = u$.
a) Montrer que $v \circ u \circ v = v$.
b) Montrer que $u \circ v$ est un projecteur.
c) Montrer que $u \circ v \circ u = u$, et en déduire que $v^2 \circ u = v$.

Exercice 254 *X 2011, 2016, 2018, Mines 2021*
Soient E un espace vectoriel, p et q deux projections de E qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projections et exprimer leurs images et noyaux en fonction de celles et ceux de p et q.

Exercice 255 *Mines 2019*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.
On suppose que $f + g = Id$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim E$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$.
b) Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 256 *Mines 2017*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si p est un projecteur, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$. La réciproque est-elle vraie ?
b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^m = Id$. Montrer que $p = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$ est un projecteur.
c) Montrer que $\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}(u^k) = \dim \mathrm{Ker}(u - Id)$.

Exercice 257 *X 2014* Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux projecteurs tels que l'endomorphisme $Id - u - v$ soit inversible. Montrer que $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, v$.

Exercice 258 *Mines 2012* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f \circ f = 0$ si et seulement s'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = f \circ p - p \circ f$.

Exercice 259 *X 2007 et 2008 et 2009 et 2015*
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Exercice 260 *X 2011* Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire de $\{0_E\} \times F$ de $E \times F$ est de la forme : $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 261 *X 2011 et Mines 2010* Soient E et F, 2 K.e.v. de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
a) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $u \circ v \circ u = u$.
b) Peut-on avoir la condition supplémentaire : $v \circ u \circ v = v$?

Exercice 262 *X 2012, Centrale 2014*
Soient E, F, G, 3 $\mathbb{K}$.e.v. de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, v$ si et seulement si $F = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 263 *X 2012*
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, A et B deux sous-espaces de E tels que $A + B = E$.
Déterminer la dimension du sous-espace L de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes stabilisant A et B.

Exercice 264 *Centrale 2014*
Soit $\delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que δ est linéaire ; déterminer son image et son noyau.
b) Montrer l'existence et l'unicité d'une base $(H_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que : $H_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = \delta(H_{n+1})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(0) = 0$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que : $P = \sum_{k \geqslant 0} \delta^k(P)(0)\, H_k$.

d) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

Exercice 265 *X 2023* Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec l'endomorphisme $T : P(X) \mapsto P(X+1)$.

Exercice 266 *Centrale 2008* Soient E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et Φ l'application qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $(u|_F, u|_G)$ dans $\mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(G,E)$. À quelle condition l'application Φ est-elle surjective ?

Exercice 267 *X 2021, Mines 2023*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
Soit S un sous-espace vectoriel de E stable par u et tel que $E = S + \mathrm{Im}(u)$.
Montrer que $S = E$.

Exercice 268 *Mines 2017*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ nilpotents. a) Si u et v commutent, montrer que $u+v$ est nilpotent. b) Montrer que ce n'est pas toujours vrai si u et v ne commutent pas.

Exercice 269 Soit E un K.e.v. et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $v \longmapsto u \circ v$.
Montrer que $\varphi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et que φ_u est nilpotente $\Leftrightarrow$ u nilpotente .

Exercice 270 *Mines 2017* Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Déterminer le rang de u.

Exercice 271 Soit $E = \mathbb{R}^3$, soit f un endomorphisme non nul de E vérifiant $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe $a \in E$ et $\varphi \in E^*$ tels que $\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)a$.

Exercice 272 *Mines 2017*
Soit $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un groupe pour la loi $\times$. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang.

Exercice 273 *X 2016* Soient E, F, G, H quatre espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \in \mathcal{L}(G,H)$. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(h \circ g \circ f)$.

Exercice 274 *Mines 2021 et 2023*
Soient E un $\mathbb{R}$ev et $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme surjectif dont le noyau est une droite vectorielle.
a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme si $E = \mathbb{R}[X]$.
b) L'espace E peut-il être de dimension finie ?
c) Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = v$.

Exercice 275 *Centrale 2011* Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $p \in \mathbb{N}$, on pose $K_p = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $I_p = \mathrm{Im}(f^p)$.
a) Montrer que l'ensemble $\{p \in \mathbb{N},\ I_p = I_{p+1}\}$ est non vide.
On pose $d = \min\{p \in \mathbb{N},\ I_p = I_{p+1}\}$. Montrer : $\forall p \geqslant d,\ I_p = I_{p+1}$.
b) En considérant la restriction φ_k de f à I_k, donner une expression de $\mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ à l'aide de I_k et de $\mathrm{Ker}\, f$. En déduire que la suite $\big(\mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})\big)_{k \geqslant 0}$ est décroissante.

Exercice 276 *X 2016*
Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ u \neq u$ et $u \circ u \circ u = u \circ u$.

Exercice 277 *X 2014*
Soit E un K.e.v. , et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f^3$. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f^4$.

Exercice 278  Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E), \exists\, p$ projecteur et $v \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $u = v \circ p$.

Exercice 279 Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit $A = X - a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
On définit : $f : E \longrightarrow E$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de PA par Q .

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ lorsque $Q = X^3 - X^2 - 3X + 2$ et $A = X - 2$.
3. Base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ lorsque $Q = X^3 - X + 1$ et $A = X - 1$.
4. Montrer que f est bijective $\Leftrightarrow a$ n'est pas racine de Q.
5. Si a est racine de Q, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{rang} f$.

Exercice 280 *X et Ens 2016*
a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X) - Q(X-1) = P(X)$.
b) Soit $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$. On pose $E_p = Id + D + \dfrac{D^2}{2} + \cdots + \dfrac{D^p}{p!}$. Monter que E_p est injectif.
