$PC_2^{\star}$

# Feuille d'exercices n° 3 : Algèbre Générale


Les cours d'algèbre duraient parfois fort tard.
- Même après 2 heures du matin ? demandait le baron.
- Des fois.
- Mais l'algèbre s'apprend aussi facilement dans un livre.
- Même plus facilement, car je ne comprends pas grand chose aux cours.
- Alors ? D'ailleurs l'algèbre ne peut te servir à rien.
- J'aime bien cela. Ça dissipe ma neurasthénie. ...

(Marcel Proust, *A la recherche du temps perdu*, Tome 10).

---

## Les basiques

---

**Exercice 144** *X 2024* Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{2-z}$.

---

**Exercice 145** *Mines 2024* Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}$.

---

## Les incontournables

---

**Exercice 146** *X 2005, 2006, 2007, 2010, 2014, Mines 2019* Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, de degré $\geqslant 2$.

1. Montrer que si $P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ alors $P'$ également.
2. On suppose que $P$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que $P'$ également.
   (b) Montrer que $P$ ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.
   (c) Montrer que $P$ ne peut avoir un coefficient nul entouré de deux coefficients non nuls et de même signe.

---

**Exercice 147** *sous-groupes additifs de* $\mathbb{R}$
a) Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit denses dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. ( *On pourra considérer* $\inf G\cap\mathbb{R}_+^*$ )
b) En déduire que $\{\sin(n), n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$

---

**Exercice 148** *X 2017, Mines 2023*
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, $P\neq X$. Montrer que $P-X$ divise $P\circ P-X$.

---

**Exercice 149** *X 2015* Déterminer les $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$.

---

**Exercice 150** *Centrale 2011, Mines 2014, X 2020, Ens 2022*
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geqslant 0$. Montrer qu'il existe $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P=A^2+B^2$.

---

**Exercice 151** *X et Ens 2016, Centrale 2019, Mines 2024*
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence et l'unicité de $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P_n\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$.
b) Soit $a \in \mathbb{Q}$. On suppose que $\cos(a\pi)$ appartient à $\mathbb{Q}$. Montrer que $2\cos(a\pi)$ est dans $\mathbb{Z}$.

---

**Exercice 152** *Centrale 2012, Mines 2014, 2017 et 2024*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et vérifiant $(E)$ : $P(X^2) = P(X)\,P(X+1)$.
a) Montrer que $P$ est unitaire.
b) Montrer que l'ensemble des racines de $P$ est stable par $z \mapsto z^2$.
c) Montrer que, si $\lambda$ est une racine non nulle de $P$ alors $|\lambda| = 1$ .
d) Montrer que $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = |z-1| = 1\}$ est constitué de deux points à expliciter.
e) Trouver tous les polynômes complexes vérifiant $(E)$.

---

**Exercice 153** *Mines 2021*
On pose $P(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.
a) Calculer le degré de $P$ et son coefficients dominant.
b) Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ en utilisant notamment cotan.
c) Calculer $\sum_{k=1}^{2n} \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$, puis $\sum_{k=1}^{2n} \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$.
d) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.
e) Montrer que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$ et que $\operatorname{cotan}^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2 x$.
f) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

**Exercice 154** *X 2005 et 2006 et 2007 et 2010 et 2014* Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2$.
b) Montrer que $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

---

**Exercice 155** *Centrale 2022* Soit $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
b) Calculer $T_n$ lorsque $n \in [\![0, 3]\!]$.
c) Calculer le degré et le coefficient dominant de $T_n$.
d) Montrer que $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2 T_n = 0$.
e) Expliciter les coefficients de $T_n$.

---

**Exercice 156** *Mines 2022, X 2023*
a) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$.
b) Déterminer toutes les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $\left|F\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$.

---

**Exercice 157** *X 2012, Mines 2023* Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(X) = XQ(X^2) + R(X^2)$.
b) Montrer que si $\sqrt{2}$ est racine de $P$, alors $-\sqrt{2}$ est aussi racine de $P$, avec la même multiplicité.

---

**Exercice 158** *Mines 2016 et 2019*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$.
Montrer que $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$.

---

## Les autres

**Exercice 159** *X 2016*
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $U_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité c'est-à-dire l'ensemble des $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^n = 1$. Calculer $\displaystyle\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in {U_n}^2 \\ \omega\neq\omega'}} (\omega - \omega')$.

---

**Exercice 160** *Mines 2023*
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \exists! P \in \mathbb{R}[X]\,,\ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$$

---

**Exercice 161** *X 2023*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n(X) = (1+X)^{6n} + X^{6n} + 1$.
On considère les trois ensembles :

$$A = \left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\right\},\quad B = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\},\quad C = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z+1| = 1\}.$$

Montrer que $P_n$ a $2n$ racines dans $A$, $2n$ racines dans $B$, $2n$ racines dans $C$ et que ces racines sont distinctes.

---

**Exercice 162** *Ens 2023*
Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de 0 sur lequel on ait simultanément :
i) $\forall x < 0,\ P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$
ii) $\forall x > 0,\ P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.

---

**Exercice 163** *Ens 2022*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ (on convient que le polynôme nul est scindé sur $\mathbb{R}$).
a) Montrer que $aP + P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $a$.
b) Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k P^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 164** *Mines 2022* Soit $n$ un entier impair plus grand que 3. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

---

**Exercice 165** *Ens 2021 et Mines 2024* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.
On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$.

---

**Exercice 166** *X 2019* Soit $P = X^n + aX + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$.
On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de $P$ comptées avec multiplicités.
Montrer que $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}\left(n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1} a^n\right)$.

---

**Exercice 167** *Ens 2021*
a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes $P = X^2 - 1$ et $Q_a = X - a$.
Quels sont les réels $a$ tels que, pour tout réel $t$, le polynôme $P + tQ_a$ a deux racines réelles ?
b) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients réels, de degrés respectifs $n$ et $n-1$, scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$.
On note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les racines de $P$ et $b_1 < \cdots < b_{n-1}$ les racines de $Q$.
Montrer que $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$ si et seulement si, pour tout réel $t$, le polynôme $P + tQ$ admet $n$ racines réelles distinctes.

---

**Exercice 168** *X 2024*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $\mathrm{Re}\,(P(X + ia))$, polynôme dont les coefficients sont les parties réelles du polynôme $P(X + ia)$, est scindé sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 169** *X 2017*
Soient $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^n$ divise $P \circ P$. Montrer que $X^n$ divise $P$.

---

**Exercice 170** *X 2017*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P \circ P$ divise $P^n$. Montrer que $P$ est de la forme $aX^k$.

---

**Exercice 171** *Ens 2024*
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = XP'_n$.
Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines complexes de $P_n$ appartiennent au disque de centre 0 et de rayon $\lambda_n$.

---

**Exercice 172** *Ens 2016, X 2022*
Soient $a$ et $b$ dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq b$, $P$ et $Q$ dans $\mathbb{C}[X]$.
On suppose que $P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\})$ et $P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\})$. Montrer que $P = Q$.

---

**Exercice 173** *Ens 2019, Mines 2019 et 2022*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1}$ et $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
a) Montrer que $P$ possède une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ que l'on note $\rho$.
b) Soit $z$ une racine complexe de $P$. Montrer que $|z| \leqslant \rho$.
c) Montrer que $\rho \leqslant \max\{1\ ,\ a_0 + \cdots + a_{n-1}\}$.
d) Montrer que $\rho \leqslant 1 + \displaystyle\max_{0\leqslant k\leqslant n-1} a_k$.

---

**Exercice 174** *Ens 2014* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ non tous nuls.
a) Soit $P = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_n|$. Monter que $P$ possède une unique racine $c \in \mathbb{R}^{+*}$.
b) Soit $Q = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$. Montrer que toute racine $z$ de $Q$ vérifie $|z| \leqslant c$.

---

**Exercice 175** *Ens 2015 et 2016*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $P(x) > 0$. Montrer qu'il existe $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs tels que $P = \dfrac{A}{B}$.

---

**Exercice 176** *X 2022*
a) Déterminer une CNS sur l'entier naturel $n$ pour que le polynôme $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise $A = (X + 1)^n - X^n - 1$.
b) Lorsque la condition précédente est vérifiée, étudier si le quotient de $A$ par $B$ est à coefficients entiers.

---

**Exercice 177** *X 2021*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Q}^*$ tels que $(c+i)^n = (c-i)^n$. Montrer que $c = \pm 1$ et $n \equiv 0\,[4]$.

---

**Exercice 178** *X 2024*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

---

**Exercice 179** *X 2023*
Soit $A \subset \mathbb{Z}^n$ une partie non vide stable par somme. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in [0,1]^N$, $(a_1, \ldots, a_N) \in A^N$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i = 0$. Montrer que $0 \in A$.

---

**Exercice 180** *X 2023*
Soient $E = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_N$ des parties de $E$ telles que, pour tout $i \neq j$ on ait $A_i \not\subset A_j$.
Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note $p_i = \mathrm{Card}(A_i)$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i!\,(n-p_i)! \leqslant n!$.

---

**Exercice 181** *X 2014* Déterminer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ de $1\,000\,000$.

---

**Exercice 182** *X 2023*
On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de $n$ pour tout $n \geqslant 1$.
Montrer que $\tau(n) \underset{n \to +\infty}{=} o(n^u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$.

---

**Exercice 183** *Ens 2021*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ qui sont premiers avec $n$. On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de $n$. Montrer que $\sqrt{\sigma(n)\,\varphi(n)} \leqslant n \leqslant \dfrac{\sigma(n) + \varphi(n)}{2}$.

---

**Exercice 184** *X 2017 et 2024* Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est un nombre premier. Montrer que $P$ est constant.

---

**Exercice 185** *X 2015* Soient $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ et $z = a + ib$.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ unitaire de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$.
b) Montrer que $a$ et $b$ sont entiers si et seulement si les coefficients de $P$ sont entiers.

---

**Exercice 186** *X 2009* Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers $\leqslant n$.

1. Soient $n$ et $m$ dans $\mathbb{N}$ distincts. Montrer que $2^{2^n} + 1$ et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \geqslant c \ln(\ln n) + d$.

---

**Exercice 187** *Ens 2024*
a) Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle que 0 et 1 appartiennent à $X$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}(X \cap [\![0, n]\!]) = 0$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $\mathrm{Card}(X \cap [\![j, j+k]\!]) = 2$.
b) Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

---

**Exercice 188** *X 2013* Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(r\pi) = 1/3$. Montrer que $r$ est irrationnel.

---

**Exercice 189** *X 2020* Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, tels que $P(X)P(X+1) = P(X^2+X+1)$.

---

**Exercice 190** *X et Centrale 2011* Soient $(a,b)$ et $(c,d)$ dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Montrer : $\exists (p,q,r,s) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a+ib = (p+iq)(c+id)+(r+is)$ avec $r^2+s^2 \leqslant c^2+d^2$. Unicité ?

---

**Exercice 191** *X 2012, Ens 2023, Mines 2023 et 2024*
Soient $A$ un ensemble de réels de cardinal $n \geqslant 2$ et $B = \{a+a',\ (a,a') \in A^2\}$.
Donner une majoration et une minoration du cardinal de B. Donner des exemples de parties $A$ pour lesquelles les bornes sont atteintes.

---

**Exercice 192** *X 2024*
Soient $n \geqslant 2$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un entier $i \in [\![0,n]\!]$ tel que l'on ait $\left|\sum_{k=0}^{i} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.

---

**Exercice 193** *Ens 2018* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite de réels distincts.
On dit que la sous-suite $(a_{i_1}, \ldots a_{i_k})$ est croissante (resp. décroissante) si $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ et $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ (resp. $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_k}$).
On note $\mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n)$ la longueur de la plus grande sous-suite croissante de $(a_1, \ldots, a_n)$ et $\mathcal{D}(a_1, \ldots, a_n)$ la longueur de la plus grande sous-suite décroissante.
a) Montrer que $\mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n) \times \mathcal{D}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant (n+1)^2/4$.
b) Montrer que $\mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n) \times \mathcal{D}(a_1, \ldots, a_n) \geqslant n$.

---

**Exercice 194** *X 2010* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine multiple de $P'$.
Montrer que $a$ est racine de $P$. Le résultat est-il conservé si $P$ n'est pas scindé ?

---

**Exercice 195** *X 2010* Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\{z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C},\ P \circ P(z) = 0\}$

---

**Exercice 196** *Ens 2023*
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers distincts. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

---

**Exercice 197** *X 2016*
Soient $a_{i,j}$ pour $0 \leqslant i,j \leqslant n$ des complexes et $P : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x^i y^j$. On suppose qu'il existe $x_1, \ldots, x_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{C}$, $y_1, \ldots, y_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall (k,\ell) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$, $P(x_k, y_\ell) = 0$.
Montrer que $P = 0$.

---

**Exercice 198** *X 2023*
Trouver un polynôme $P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ à deux variables qui est injectif sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

---

**Exercice 199** *Centrale 2023*
Soit $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\}$.
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $S_P = \sup_{z \in D} |P(z)|$ existe.
b) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = 1 + \alpha X^n$. Montrer que si $S_P = 1$ alors $\alpha = 0$.
c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $S_P = |P(0)|$. Montrer que $P$ est constant.

---

**Exercice 200** *X 2024*
Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont toute combinaison linéaire réelle est scindée ou nulle, $x$ et $y$ deux racines de $A$ telles que $x < y$. Montrer que $B$ a une racine dans $[x,y]$.

---