



Les cours d'algèbre duraient parfois fort tard.

- Même après 2 heures du matin ? demandait le baron.
- Des fois.
- Mais l'algèbre s'apprend aussi facilement dans un livre.
- Même plus facilement, car je ne comprends pas grand chose aux cours.
- Alors ? D'ailleurs l'algèbre ne peut te servir à rien.
- J'aime bien cela. Ça dissipe ma neurasthénie. ...

(Marcel Proust, *A la recherche du temps perdu*, Tome 10).

Les incontournables

Exercice 146 *X 2005, 2006, 2007, 2010, 2014, Mines 2019* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme de degré ≥ 2 .

1. Montrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' également.
2. On suppose que P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
 - (a) Montrer que P' également.
 - (b) Montrer que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.
 - (c) Montrer que P ne peut avoir un coefficient nul entouré de deux coefficients non nuls et de même signe.

Exercice 147 *sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$*

- a) Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit denses dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. (On pourra considérer $\inf G \cap \mathbb{R}_+^*$)
- b) En déduire que $\{\sin(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$

Exercice 148 *X 2017, Mines 2023*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq X$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 149 *X 2015* Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

Exercice 150 *Centrale 2011, Mines 2014, X 2020, Ens 2022*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 151

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on dit que α est un nombre algébrique si α est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'un rationnel qui est un nombre algébrique est un entier relatif.

Exercice 152 *X et Ens 2016, Centrale 2019*

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence et l'unicité de $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.
- b) Soit $a \in \mathbb{Q}$. On suppose que $\cos(a\pi)$ appartient à $\mathbb{Q}$. Montrer que $2\cos(a\pi)$ est dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 153 *Mines 2010*

1. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in]0, \pi[, P_n(\cotan^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin x)^{2n+1}}$.

2. Déterminer les racines de P_n ainsi que leur somme.

3. En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 154 *X 2005 et 2006 et 2007 et 2010 et 2014* Soit $P = a_0 + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$.

b) Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 155 *Mines 2022, X 2023*

a) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $|P(e^{i\theta})| = 1$.

b) Déterminer toutes les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que, pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $|F(e^{i\theta})| = 1$.

Exercice 156 *Mines 2023*

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(X) = XQ(X^2) + R(X^2)$.

b) Montrer que si $\sqrt{2}$ est racine de P , alors $-\sqrt{2}$ est aussi racine de P , avec la même multiplicité.

Exercice 157 *Mines 2016 et 2019*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$.

Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Les autres

Exercice 158 *X 2016*

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On note U_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité c'est-à-dire l'ensemble des $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^n = 1$. Calculer $\prod_{\substack{(\omega, \omega') \in U_n^2 \\ \omega \neq \omega'}} (\omega - \omega')$.

Exercice 159 *Mines 2017*

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$ et U_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

a) Combien de triangles distincts peut-on former avec les éléments de U_n ?

b) Combien de triangles rectangles distincts peut-on former avec les éléments de U_n ?

Exercice 160 *Mines 2023*

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists ! P \in \mathbb{R}[X], Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$$

Exercice 161 *Mines 2023*

Soit n un entier naturel pair. Soit $P = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$.

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, α^{2^k} est racine de P .

Exercice 162 *X 2023*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n(X) = (1 + X)^{6n} + X^{6n} + 1$.

On considère les trois ensembles :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \right\}, \quad B = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}, \quad C = \{ z \in \mathbb{C} ; |z + 1| = 1 \}.$$

Montrer que P_n a $2n$ racines dans A , $2n$ racines dans B , $2n$ racines dans C et que ces racines sont distinctes.

Exercice 163 *X 2023*

Soient $a_1 < \dots < a_n$ des réels et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels.

Montrer que la fraction rationnelle $R = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - a_k}$ admet une primitive qui est une fraction rationnelle si et seulement si tous les λ_k sont nuls.

Exercice 164 *Ens 2023*

Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de 0 sur lequel on ait simultanément :

- i) $\forall x < 0, P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$
 - ii) $\forall x > 0, P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.
-

Exercice 165 *Mines 2021*

- a) Montrer que $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad P \mapsto P - P'$ est bijective.
 - b) Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - P' = Q$.
 - c) On suppose Q positive. En considérant $f(x) = e^{-x}P(x)$, montrer que P est positive.
 - d) On suppose P scindé à racines simples. Montrer que Q est scindé à racines simples.
-

Exercice 166 *X 2023*

Existe-t-il une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels non nuls telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ soit scindé à racines simples dans $[0, 1]$?

Exercice 167 *Mines 2022*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, que l'on écrit $P = P_1 + iP_2$ avec P_1, P_2 dans $\mathbb{R}[X]$. On suppose que $\operatorname{Im} z < 0$ pour toute racine z de P .

- a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|P(z)| = |P(\bar{z})|$ alors z est réel.
 - b) En déduire que P_1 est scindé sur $\mathbb{R}$.
-

Exercice 168 *Ens 2021*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$.

Exercice 169 *X 2019* Soit $P = X^n + aX + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$.

On note $x_1, \dots, x_n$ les racines de P comptées avec multiplicités.

Montrer que $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} (n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1} a^n)$.

Exercice 170 *ENS 2021*

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes $P = X^2 - 1$ et $Q_a = X - a$.

Quels sont les réels a tels que, pour tout réel t , le polynôme $P + tQ_a$ a deux racines réelles ?

b) Soit $n \geq 2$ un entier. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, de degrés respectifs n et $n-1$, scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$.

On note $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ les racines de P et $b_1 < \dots < b_{n-1}$ les racines de Q .

Montrer que $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$ si et seulement si, pour tout réel t , le polynôme $P + tQ$ admet n racines réelles distinctes.

Exercice 171 *Mines 2017*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(1 + iX)^n = P + iQ$ et $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Montrer que $aP + bQ$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 172 *X 2017*

Soient $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que P^n divise $P \circ P$. Montrer que X^n divise P .

Exercice 173 *X 2017*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P \circ P$ divise P^n . Montrer que P est de la forme aX^k .

Exercice 174 *Ens 2016, X 2022*

Soient a et b dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq b$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$.

On suppose que $P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\})$ et $P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\})$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 175 *Ens 2019, Mines 2019 et 2022*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1}$ et $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

- a) Montrer que P possède une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ que l'on note ρ .
 - b) Soit z une racine complexe de P . Montrer que $|z| \leq \rho$.
 - c) Montrer que $\rho \leq \max\{1, a_0 + \dots + a_{n-1}\}$.
 - d) Montrer que $\rho \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k$.
-

Exercice 176 *Ens 2017*

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose $M = \max\{|P(z)| ; z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

- a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\int_0^{2\pi} e^{ikt} P(e^{it}) dt$.
 - b) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que $M \geq |a_j|$.
 - c) Montrer que $M \geq |a_0| + |a_n|$.
 - d) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq i < j \leq n$. Montrer que $M \geq |a_i| + |a_j|$.
-

Exercice 177 *Ens 2015 et 2016*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $P(x) > 0$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs tels que $P = \frac{A}{B}$.

Exercice 178 *Centrale 2014* Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.**Exercice 179** *X 2022*

- a) Déterminer une CNS sur l'entier naturel n pour que le polynôme $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise $A = (X + 1)^n - X^n - 1$.
 - b) Lorsque la condition précédente est vérifiée, étudier si le quotient de A par B est à coefficients entiers.
-

Exercice 180 *Mines 2022 et 2023* Soit $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ des réels. On pose $P := \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$.

- a) Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples $\beta_1 < \dots < \beta_{n-1}$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1}$.

- b) Exprimer $\frac{P'}{P}$ en fonction des α_i , et $\frac{P''}{P'}$ en fonction des β_j .
- c) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0$.
- d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $P' + \alpha P$ admet au moins $n - 1$ racines réelles.
- e) En traçant le graphe de $\frac{P'}{P}$, montrer que $P' + \alpha P$ admet exactement n zéros réels distincts.

Exercice 181 *Centrale 2022* On définit la suite de polynômes $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par $Z_0(X) = X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1}(X) = Z_n(X)^2 + X$.

- a) Préciser le degré et le coefficient dominant de Z_n .
- b) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite $(|Z_n(c)|)$ ne tend pas vers $+\infty$. Soit $c \in \mathbb{C}$, montrer que $c \notin \mathcal{M}$ si et seulement s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|Z_{n_0}(c)| > 2$.

Exercice 182 *X 2021*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Q}^*$ tels que $(c + i)^n = (c - i)^n$. Montrer que $c = \pm 1$ et $n \equiv 0 [4]$.

Exercice 183 *X 2023*

Soit $A \subset \mathbb{Z}^n$ une partie non vide stable par somme. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in [0, 1]^N$, $(a_1, \dots, a_N) \in A^N$ tels que : $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ et $\sum_{i=1}^N \lambda_i a_i = 0$. Montrer que $0 \in A$.

Exercice 184 *X 2023*

Soient $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_N$ des parties de E telles que, pour tout $i \neq j$ on ait $A_i \not\subset A_j$. Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note $p_i = \text{Card}(A_i)$. Montrer que $\sum_{i=1}^N p_i! (n - p_i)! \leq n!$.

Exercice 185 *X 2015, Mines 2022* Pour deux ensembles E et F , on note $E \Delta F := (E \cup F) \setminus (E \cap F)$. Pour trois ensembles A, B, C , montrer que $A \Delta C = B \Delta C$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 186 *X 2023*

On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\tau(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 187 *X 2020*

Soient $a \geq 2$ et $k \geq 1$.

- a) montrer que si $a^k + 1$ est premier, alors k est pair ou $k = 1$.
- b) montrer que si $a^k + 1$ est premier, alors k est une puissance de 2.
- c) soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$ un entier non multiple de p . Montrer que $a^p \equiv a [p]$

Exercice 188 *X 2015* Soient $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ et $z = a + ib$.

- a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P unitaire de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$.
- b) Montrer que a et b sont entiers si et seulement si les coefficients de P sont entiers.

Exercice 189 *X 2009* Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers $\leq n$.

- Soient n et m dans $\mathbb{N}$ distincts. Montrer que $2^{2^n} + 1$ et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux.
- Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \geq c \ln(\ln n) + d$.

Exercice 190 *X et Ens 2016*

- a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est racine de P alors $\alpha \in \mathbb{Z}$.
 b) Montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$.
 c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. On suppose que $\cos(\pi r)$ appartient à $\mathbb{Q}$. Montrer que $2 \cos(\pi r) \in \mathbb{Z}$.
 d) Déterminer les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
-

Exercice 191 *X 2013* Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(r\pi) = 1/3$. Montrer que r est irrationnel.**Exercice 192** *X 2019*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de couples d'entiers $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2a + 3b = n$.

Exercice 193 *X 2023*

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ tels que $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$.

Exercice 194 *Centrale 2023*

Soit Φ l'application de $\{0, 1\}^n$ dans $\mathbb{N}$ qui à $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ associe $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k$.

- a) Montrer que Φ est injective.
 b) Déterminer $\Phi(\{0, 1\}^n)$.
-

Exercice 195 *X 2020* Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, tels que $P(X)P(X+1) = P(X^2+X+1)$.**Exercice 196** *X et Centrale 2011*

Soient (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Montrer : $\exists (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a + ib = (p + iq)(c + id) + (r + is)$ avec $r^2 + s^2 \leq c^2 + d^2$. Unicité ?

Exercice 197 *Ens 2017*

On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est fade s'il n'existe pas de $(x, y, z) \in A^3$ tel que $x + y = z$. Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 198 *X 2012, Ens et Mines 2023*

Soient A un ensemble de réels de cardinal $n \geq 2$ et $B = \{a + a', (a, a') \in A^2\}$.

Donner une majoration et une minoration du cardinal de B . Donner des exemples de parties A pour lesquelles les bornes sont atteintes.

Exercice 199 *X 2018* Trouver $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $f \circ f \circ f + f \circ f + f = 3Id_{\mathbb{N}^*}$.**Exercice 200** *Mines 2023*

Etant donnés 13 réels, montrer qu'on peut toujours en trouver deux, qu'on note x et y , tels que $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 201 *Ens 2018* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = (a_1, \dots, a_n)$ une suite de réels distincts.

On dit que la sous-suite $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ est croissante (resp. décroissante) si $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$ (resp. $a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_k}$).

On note $\mathcal{C}(a_1, \dots, a_n)$ la longueur de la plus grande sous-suite croissante de $(a_1, \dots, a_n)$ et $\mathcal{D}(a_1, \dots, a_n)$ la longueur de la plus grande sous-suite décroissante.

- a) Montrer que $\mathcal{C}(a_1, \dots, a_n) \times \mathcal{D}(a_1, \dots, a_n) \leq (n+1)^2/4$.
 b) Montrer que $\mathcal{C}(a_1, \dots, a_n) \times \mathcal{D}(a_1, \dots, a_n) \geq n$.
-

Exercice 202 *Mines 2011* Calculer $\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$

Exercice 203 *X 2012*

Soit $A = \{ \lfloor n\sqrt{2} \rfloor, n \in \mathbb{N} \}$. Montrer que A contient une infinité de puissances de 2.

Exercice 204 *X 2010* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine multiple de P' . Montrer que a est racine de P . Le résultat est-il conservé si P n'est pas scindé ?

Exercice 205 *X 2010* Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\{z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C}, P \circ P(z) = 0\}$

Exercice 206 *Ens 2023*

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers distincts. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

Exercice 207 *Mines 2009*

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X + 4)P(X) = X P(X + 1)$.

Exercice 208 *X 2016*

Soient $a_{i,j}$ pour $0 \leq i, j \leq n$ des complexes et $P : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$. On suppose qu'il existe $x_1, \dots, x_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{C}$, $y_1, \dots, y_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall (k, \ell) \in \{1, \dots, n+1\}^2, P(x_k, y_\ell) = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 209 *X 2023*

Trouver un polynôme $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ à deux variables qui est injectif sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 210 *Ens 2013*

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $Z(P)$ le nombre de racines de P dans $\mathbb{R}^{+*}$, comptées avec leur ordre de multiplicité.
a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que les racines réelles de P sont simples. Montrer que $Z(P') \geq Z(P) - 1$.
b) Soit $P = a_1 X^{n_1} + a_2 X^{n_2} + \dots + a_p X^{n_p}$ où les a_i sont non nuls et la suite (n_i) est une suite strictement croissante d'entiers. On note $V(P)$ le nombre de changements de signe de $(a_1, \dots, a_n)$. Montrer que $V(P) \geq Z(P)$ et que $V(P) - Z(P)$ est un entier pair.

Exercice 211 *Centrale 2023*

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $S_P = \sup_{z \in D} |P(z)|$ existe.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = 1 + \alpha X^n$. Montrer que si $S_P = 1$ alors $\alpha = 0$.

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $S_P = |P(0)|$. Montrer que P est constant.

Exercice 212 *X 2017* Soit U l'ensemble des complexes z tels qu'existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $z^n = 1$. Quels sont les complexes u tels que U soit stable par multiplication par u ?

Exercice 213 *X 2014*

Soit A une partie de $\mathbb{C}$ de cardinal $n \geq 2$. On suppose que $f : z \mapsto z^2$ induit une bijection de A .

a) On suppose que 1 n'appartient pas à A . Montrer que : $\prod_{a \in A} (1 + a) = 1$.

b) Déterminer les ensembles A vérifiant cette propriété.
