

**Exercice 98** *X 2017, Mines 2023*

Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

- a) Montrer que la série de terme général e^{-a_n} converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
 b) Peut-on conclure si $\alpha = 1$?

Exercice 99 *Mines 2015 et X 2016* Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \ln \left(\tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \right)$?**Exercice 100** *X 2016, Mines 2019* Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_n = 2 a_{\lfloor n/2 \rfloor}$ si $n \geq 2$.

- a) Montrer que cette suite est bien définie.
 b) Montrer que la série de terme général $1/a_n^2$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 101 *X 2009* Nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{\ln n} \right)^{\ln n}$.**Exercice 102** *Centrale 2017*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$?

Exercice 103 *Mines 2012* Soient P et Q deux polynômes réels sans racine dans $\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la série de terme général $\ln(|P(n)|/|Q(n)|)$.**Exercice 104** *Mines 2012* $u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\cos \left(\frac{\pi \sin x}{2} \right) \right)^n dx$. Si $\alpha > 0$, nature de $\sum u_n^\alpha$?**Exercice 105** *Mines 2023*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que les séries $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de même nature.

Exercice 106 *Mines 2010 et 2017* Nature de la série de terme général $u_n = \cos \left(\pi n^2 \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) \right)$?**Exercice 107** *Centrale 2023*

a) Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f possède un unique point fixe.

b) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$. Étudier la nature de la série $\sum (u_n - 1)$.

Exercice 108 *Centrale 2011, X 2015* Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- a) Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. b) On suppose que $u_0 > 0$. Donner un équivalent de u_n . En déduire la nature de la série de terme général u_n^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
 c) On suppose $u_0 < 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $|u_n|^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 109 *X 2012*

Soient $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ définies par : $x_0 = y_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{7 + y_n}$, $y_{n+1} = \sqrt{7 - x_n}$.

- a) Montrer que ces suites sont bien définies. b) Montrer que les suites convergent et déterminer leur limite.
-

Exercice 110 *Centrale 2022*

- a) Soit $\alpha > 1$. Montrer que la somme $\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^{-\alpha}$ est bien définie et déterminer un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.

- b) On suppose $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, u étant une suite à termes strictement positifs, et que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$.

- c) Soit $U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$. Montrer que $U_n = 2\sqrt{n} + a + \frac{b}{\sqrt{n}} - \frac{1}{24n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
-

Exercice 111 *Ens 2022* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

- a) Déterminer un équivalent de u_n .

- b) On note a_n l'équivalent obtenu à la question précédente. Montrer que $u_n - a_n$ converge vers un réel noté γ .

- c) Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n .
-

Exercice 112 *Mines 2019 et 2021, Centrale 2021 et 2023* On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$.

- a) Déterminer un équivalent de u_n .

- b) Nature de la série de terme général $1/u_n$?
-

Exercice 113 *X 2012, 2013, 2015 et 2020, Mines 2023*

Soit $k \in \mathbb{N}$. Equivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 114 *Mines 2022*

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $a_n \geq 0$ tel que $e^{a_n} + na_n = 2$.

- b) Déterminer la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$.

- c) Déterminer la limite de $n(1 - na_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
-

Exercice 115 *Mines 2021*

- a) Montrer qu'il existe un et seul réel, noté x_n , tel que $x_n^5 + x_n - \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

- b) Montrer que (x_n) tend vers 0.

- c) Trouver un équivalent de x_n .

- d) Quelle est la nature de la série de terme général x_n ?
-

Exercice 116 *Mines 2018*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 - \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}\right)$. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 117 *Centrale 2010*

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+1+k}$.

Exercice 118 *Centrale 2012* Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.

a) On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

b) Donner un exemple de suite telle que $\sum a_n$ diverge et $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

Exercice 119 *Mines 2014*

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que la série de terme général $|b_n|$ converge, la série de terme général $a_n b_n$ soit convergente. Montrer que la suite (a_n) est bornée.

Exercice 120 *X 2018, Mines 2023*

Soit a_n une suite à valeurs réelles positives. On pose $u_n = \frac{a_n}{\prod_{k=0}^n (1+a_k)}$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum_{n \geq 0} u_n \leq 1$.

b) Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Exercice 121 *Mines 2009, 2011, 2013 et 2016*

a) Montrer que les séries de termes généraux $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ sont de même nature. b) La déterminer.

Exercice 122 *Mines 2013* Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = e^{-n^3} \int_0^n e^{t^3} dt$?**Exercice 123** *X 2018*

a) Existe-t-il $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge et la série $\sum a_n^{42}$ diverge ?

b) Existe-t-il $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge et la série $\sum a_n^{41}$ diverge ?

c) Existe-t-il $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ diverge et la série $\sum a_n^{1/42}$ converge ?

Exercice 124 *X 2014 et Mines 2018*

Soient (u_n) une suite à termes positifs et (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n})$. Montrer que la suite (v_n) converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

Exercice 125 *X 2020* Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n^\alpha}$.**Exercice 126** Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}$.

Exercice 127 *X 2017*

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$?

Exercice 128 *Mines 2019 et 2021* Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n . Déterminer la nature de $\sum (10 - n^{1/p_n})$.

Exercice 129 *Centrale 2011* Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $s(n)$ la nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de n . Convergence et somme de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 130 *Mines 2017*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le plus grand diviseur impair de n . La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{nd_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 131 *Mines et X 2023*

Soit $x \geq 0$. Donner un équivalent de la suite de terme général $u_n = \prod_{i=1}^n (x + i)$.

Exercice 132 *Mines 2009* a) Nature de la série de terme général $n^{1/n}$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n k^{1/k}$. Montrer que $S_n \sim n$ puis que $S_n - n \sim \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 133 *Ens 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod_{k=n}^{2n} k^k \right)^{1/n}$

a) Déterminer un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 134 *Mines 2010, Centrale 2022*

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$ où a, b, c, d sont des réels strictement positifs.

a) Trouver un réel α tel que la suite $(\ln(n^\alpha u_n))$ converge.

b) On suppose que cette condition est vérifiée. Donner un équivalent de (u_n) .

c) Déterminer une condition sur a, b, c, d pour que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 135 *Mines 2005* Soit f une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(1) = 1$. Prouver que les séries $\sum 1/f(n)$ et $\sum f^{-1}(n)/n^2$ sont de même nature.

Exercice 136 *Mines et Centrale 2014* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 137 *Mines 2019* Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$.

a) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq \frac{p}{q} \Rightarrow \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{c}{q}$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ est irrationnel. c) Qu'en est-il de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2}$?

Exercice 138 *Ens 2017*

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$, admettant au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique du type $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{b}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que la série de terme général $u_n = \prod_{k=1}^n \varphi(k)$ converge.

Exercice 139 *Ens et Mines 2023*

Soit $\sum a_n$ une série convergente de réels positifs. Montrer que la série $\sum \frac{a_n^x}{n}$ converge pour tout $x > 0$.

Exercice 140 *Mines 2021*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive.

On considère $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_0 > 0$, $v_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n + u_n v_{n-1}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 141 *Ens 2023*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum \exp(a_n)$ converge.

Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(ka_n)$.

Exercice 142 *Centrale 2023*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le plus petit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \geq n$.

a) Montrer que les p_n sont bien définis et donner p_0, p_1, p_2 .

b) Montrer que (p_n) tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = e$.

Exercice 143 *Centrale 2023*

Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, où $\alpha \in [0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \inf \left\{ p \in \mathbb{N}^*, n \leq \sum_{k=1}^p f(k) \right\}$.

a) Montrer l'existence de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n$.

b) Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^p f(k)$. En déduire un équivalent de a_n .

Exercice 144 *Ens 2023*

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sin^2(n)}{n}$?

Exercice 145 *X 2020* Déterminer les valeurs de $c > 0$ pour lesquelles la propriété suivante est vraie pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n \leq c(a_{2n} + a_{2n+1})$ alors la série $\sum a_n$ diverge.

... Fin de Séries ...