



“On n'est pas “séries” quand on a dix-neuf ans ” (Arthur R.)

	Vrai / Faux	V	F
1	La série de terme général u_n converge ssi la suite des sommes partielles est bornée.	☐	☐
2	La série de terme général $\cos n$ converge.	☐	☐
3	Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général u_n^2 converge.	☐	☐
4	Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive, $\sum u_n$ diverge implique $\sum u_n^{2/3}$ diverge.	☐	☐
5	La somme de deux séries divergentes est divergente.	☐	☐
6	Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive, $u_n = o(\frac{1}{n})$ implique $\sum u_n$ converge .	☐	☐
7	Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive, $\sum u_n$ converge implique $u_n = o(\frac{1}{n})$.	☐	☐
8	Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	☐	☐
9	Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, si les deux séries convergent alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.	☐	☐
10	Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, si les deux séries convergent alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.	☐	☐
11	Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, si les deux séries divergent alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.	☐	☐
12	Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, si les deux séries divergent alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.	☐	☐
13	Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent alors $\sum c_n$ converge où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.	☐	☐

LES BASIQUES

Exercice 69 Mines 2019

Justifier l'existence de $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ et calculer cette somme.

Exercice 70 Mines 2009 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$. À quelle condition la série de terme général u_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer la somme.

Exercice 71 Centrale 2013 Soit, pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
 b) Nature, suivant $a > 0$, de la série de terme général a^{H_n} ?

Exercice 72 Centrale 2009, 2010, 2018, 2019, X 2011, Mines 2014, Ens et X 2023

a) Montrer que $e^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $v_n \in \mathbb{Z}$ et $R_n \in \mathbb{R}$ tels que : $n! e^{-1} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_n$ avec $|R_n| \leq \frac{1}{n^2}$.
 c) Nature de la série de terme général $\sin(2\pi e^{-1}n!)$?

Exercice 73 *Ens 2023*

Nature, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\sum |\sin(2\pi en!)|^\alpha$.

Exercice 74 *Mines 2016, 2018 et 2019*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

Déterminer la limite de (u_n) . Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 75 *Mines 2016* Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 76 Soient $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer : $\exists c$ constante (dépendante de a et b) telle que :
 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a+bk} = \frac{1}{b} \ln n + c + \varepsilon(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

LES INCONTOURNABLES

Exercice 77 *Mines 2011, 2013 et 2018* On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
a) Montrer que $u_n \sim v_n$. b) Quelle est la nature des séries de termes généraux u_n et v_n ? Moralité?

Exercice 78 *Centrale 1999* On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 79 *Mines 2023*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n A_n = 1$, où $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

- a) Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- b) Montrer que $A_n \sim A_{n+1}$.
- c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_{n+1}^2 - A_n^2) = 2$.
- d) Soient $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge.

Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$. En déduire $a_n \sim 1/\sqrt{2n}$.

- e) Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $b_n \sim 1/\sqrt{2n}$. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une intégrale, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n B_n = 1$, où $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.
-

Exercice 80 *Mines 2010, 2011, 2015, 2021, 2022 et 2023, X 2014, Centrale 2016* La règle de Duhamel¹

Soit une série de terme général $u_n > 0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$. a) Nature de cette série?

- b) On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En étudiant la suite $\ln(n^\alpha u_n)$, trouver un équivalent de u_n .
 - c) En déduire la nature de la série de terme général u_n .
-

1. Jean-Marie Constant Duhamel : 1797 St-Malo - 1872 Paris : mathématicien français

Exercice 81 *Centrale 2013, X 2016* Soit u_n à termes strictement positifs.

a) Quelles implications y a-t-il entre $u_n = o(\frac{1}{n})$ et $\sum u_n$ converge ?

Exercice 82 *Séries de Kempner²* Dans la série harmonique, on supprime tous les termes dont le dénominateur comporte un 5 dans son écriture décimale. Nature de la série obtenue ?



Exercice 83 *Principe de condensation ou critère de la loupe :*

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Application : retrouver la convergence des séries de Riemann et de Bertrand

Exercice 84 *Transformation d'Abel³* Soient (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k$.

b) On suppose que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

c) En déduire une autre démonstration du C.S.A.

d) Déterminer la nature de $\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$, $\sum \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$, $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$

Exercice 85 Montrer que $\cos 1$ est un irrationnel.

Exercice 86 *Centrale 2018* Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la série de terme général $1/\sigma(n)^2$ converge.

b) Montrer que la série de terme général $1/\sigma(n)$ diverge.

c) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série de terme général a_n converge. Montrer que la série de terme général $a_{\sigma(n)}$ converge.

LES AUTRES

Exercice 87 *Mines 2009, 2010, 2012, 2017* Nature de la série $\sum u_n = \sin \left(\pi n^3 \left(\ln \left(\frac{n}{n-1} \right) \right)^2 \right)$.

Exercice 88 *Mines 2018*

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que la série $\sum u_n$ converge et telles que, pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)$. Montrer que (u_n) appartient à $\mathcal{F}$.

2. Aubrey J. Kempner, 1880-1973, mathématicien américain.

3. Niels Henrik Abel 1802 Frindøe -1829 Froland : mathématicien norvégien au destin tragique ...



Ind. Montrer, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, que $\ln(1+x+y) \leq \ln(1+x) + \ln(1+y)$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer l'existence de $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $t = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

Exercice 89 *X 2009, Mines 2012*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f'(x)/f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum f(n)$?

Exercice 90 On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 91 *X 2015* Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de zéros dans l'écriture décimale de n . Déterminer, suivant $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $x^{s(n)}/n^{10}$.

Exercice 92 *X 2015* Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Nature de : $\sum \varphi(n)/n^2$?

Exercice 93 *X 2016 et 2018* Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 94 *X 2018*

Déterminer les deux premières décimales de $\cos(1)$.

Exercice 95 *Mines 2018*

a) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$. Comparer $\sum_{k=1}^n \text{Arccos}(\alpha_k)$ et $\text{Arccos}(\prod_{k=1}^n \alpha_k)$.

b) Soit (a_n) une suite croissante de réels. On suppose $a_0 > 0$ et $a_n \rightarrow +\infty$. Nature de la série de terme général $\text{Arccos}(a_k/a_{k+1})$?

Exercice 96 *Centrale 2022*

a) Montrer que la suite u définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ converge, puis donner sa limite.

b) Montrer que la suite v définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right)$ converge.

Exercice 97 *Mines 2018*

a) Montrer que la série de terme général $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ converge.

b) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer l'existence de $k \in \{-1, 0, 1\}$ tel que

$$\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) + k\pi$$

Préciser pour quelles valeurs de (x, y) on a $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2n^2}\right)$.
