PC $\overset{\star}{2}$

Feuille d'exercices n° 1 : Suites : suite

Exercice 33 *Mines 2010, Centrale 2011*

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$.

On suppose que $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $y_n \to \ell$.

Exercice 34 *X 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a) Étudier (u_n) pour $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que (u_n) converge. Déterminer alors sa limite.

Exercice 35 *X 2018*

Soit (b_n) une suite strictement croissante de réels de limite $+\infty$. Soit (a_n) une suite réelle.

On suppose que $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 36 *X 2018* Soit $n \geqslant 2$,

a) Montrer qu'il existe $k < n$ tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{i}{n}) \leqslant 0.5$.

b) On appelle k_n le plus petit entier vérifiant cette propriété. Montrer que $k_n \to \infty$.

c) k_n est-il un $o(n)$?

Exercice 37 *X 2010 et 2015* Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $a_0, b_0 \in]0,1[^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \max\{x, b_n\}dx$ et $b_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \min\{x, a_n\}dx$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant b_n \leqslant 1/2 \leqslant a_n \leqslant 1$.
2. Étudier la convergence de (a_n) et de (b_n).

Exercice 38 *X 2017, Mines 2022* Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \min(3 - x_{n+1}, 2x_n - 2)$.

a) La suite x est-elle convergente ?

b) Montrer que x prend des valeurs négatives.

c) Montrer que x n'est pas bornée.

Exercice 39 *X 2023*

Soit u_n le maximum de la fonction $x \mapsto (n-x)\ln(x)$ sur $[0,n]$.

a) Trouver un équivalent de u_n.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \geqslant 3$, $v_n = u_n - n\ln(n) + n + n\ln(\ln(n)) + \lambda n$. Montrer que $v_n \to +\infty$ si $\lambda \geqslant 0$ et $v_n \to -\infty$ sinon.

Exercice 40 *Mines 2023*

Soit n un entier supérieur à 3.

a) Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions strictement positives notées u_n et v_n telles que $u_n < v_n$.

b) Montrer que u_n admet une limite ℓ à préciser. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

c) Déterminer la limite de v_n, puis un équivalent de v_n.

Exercice 41 *X 2014, Mines 2023*
Soit u_n une suite positive telle que $u_{n+1} \leqslant u_n + \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n > 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 42 *adapté de X 2009* Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2024^{2024}$ et $u_{n+1} =$ somme des chiffres de u_n.

Exercice 43 *Ens 2014 et 2015, Centrale 2019* a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left[n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$.
b) Montrer que $x_n - n\pi \sim \dfrac{\pi}{2}$.
c) Calculer les trois premiers termes du développement asymptotique de $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 44 *X 2017*
a) Montrer que la fonction cos admet dans $\mathbb{R}$ un unique point fixe. b) Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 45 *Ens 2009* Équivalent puis développement asymptotique de $u_n = \left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)^{1/n}$.

Exercice 46 *X 2023*
Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$.
a) Déterminer la limite de (u_n).
b) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$ on a $n^\alpha u_n \to +\infty$.

Exercice 47 *Mines 2017*
Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n}$.
a) Trouver $C \in]0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$.
b) Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$.
c) Montrer que (u_n) converge vers ℓ et que, pour tout n, $u_n \neq \ell$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{|u_n - \ell|}{|f'(\ell)|^n}$.
d) Montrer que la série de terme général $\ln(|v_{n+1}|/|v_n|)$ converge. En déduire un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 48 *Mines 2011*

1. Étudier les $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left({u_n}^2 + u_n\right)$.
2. Déterminer la limite éventuelle de $\left({u_n}^{1/n}\right)$ suivant la valeur de u_0.

Exercice 49 *X 2015*
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et, pour tout n, $x_{n+1} = x_0 \times \cdots \times x_n + 2$. Equivalent de x_n ?

Exercice 50 *Ens 2010 et Centrale 2016*
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = \dfrac{1}{p}(u_{n+p-1} + u_{n+p-2} + \cdots + u_n)$.
a) Étude du cas $p = 3$.

(i) Écrire une fonction Python permettant de calculer u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.
(ii) Vérifier sur des exemples que (u_n) converge en représentant u_n en fonction de n.
(iii) Démontrer la convergence de (u_n) dans le cas général.
b) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $Q_p = pX^p - X^{p-1} - \cdots - X - 1$.
(i) Montrer que les racines de Q_p sont de module inférieur ou égal à 1.
(ii) Montrer que 1 est racine simple de Q_p et que c'est la seule racine de module 1 de Q_p.
(iii) En déduire que (u_n) converge.
(iv) Exprimer la limite de (u_n) en fonction de $(u_0, \dots, u_{p-1})$.

Exercice 51 *Mines 2023*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{n+1}$.
Trouver un équivalent de u_n.

Exercice 52 *Mines 2019* Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et $v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.
Déterminer les limites éventuelles de (u_n) et de (v_n).

Exercice 53 *X 2012* On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$, $w_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^3}}$.
Déterminer les limites de (u_n), (v_n), (w_n).

Exercice 54 *X 2016*
Soit (b_n) définie par $b_1 = 2$ et $b_n = b_{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$ pour $n \geqslant 2$. Trouver un équivalent de b_n.

Exercice 55 *X 2017*
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in]-1, 1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$.
a) Montrer que (x_n) converge. On note ℓ sa limite.
b) Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 56 *X 2008, 2015 et 2019*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
a) Donner un équivalent de u_n. b) Si $u_0 = 5$, montrer que $u_{1000} \in [45, 45.1]$.

Exercice 57 *ENS 2007*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout n. En donner un équivalent.

Exercice 58 *X 2018* Soit (c_n) la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $c_n = 1$ si le premier chiffre en base 10 de n est égal à 1, $c_n = 0$ sinon.
La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$ est-elle convergente ?

Exercice 59 *X 2015* Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que $x_n + \dfrac{1}{2}x_{n+1} \to 1$.
Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 60 *X 2016*
Construire $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi(n) - n \to +\infty$, la suite (a_n) ne converge pas, mais $a_{\varphi(n)} - a_n \to 0$.

Exercice 61 Chercher les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}+u_{n+1}+u_n = n$.

Exercice 62 Soit u_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres ne comportant pas la séquence 13. Montrer que $u_{n+2} = 10\,u_{n+1} - u_n$. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 63 *X 2023*
Soit (u_n) une suite bornée. Montrer qu'il y a équivalence entre :
(i) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k<n} |u_k| \to 0$,
(ii) il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n}\,|A \cap [0, n-1]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim_{n\notin A} u_n = 0$.

Exercice 64 *X 2022* Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $u_0 > 1$, $u_1 > 1$ et $\forall n \geqslant 2, u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + u_{n-2}^2}{2}$.
a) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 65 *ENS MP 2015* Peut-on trouver un entier n tel que n^{2024} commence par 2024 ?

Exercice 66 *X 2016* a) Montrer que $\alpha = \ln(2)/\ln(10)$ appartient à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
b) Montrer que, pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \leqslant n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \leqslant b$.
c) Montrer qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par 2024.

Exercice 67 *Ens 2019* Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left|\left\{d \ ;\ d \mid n \text{ et } \sqrt{\tfrac{n}{2}} \le d \le \sqrt{2n}\right\}\right|$.
a) La suite $(a_n)_{n\ge 1}$ est-elle convergente ?
b) La suite $(a_n)_{n\ge 1}$ est-elle bornée ?

Exercice 68 *X 2015* Quel sens peut-on donner à

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}}$$

?