PC $\star_2$ Feuille d'exercices n° 1 : Suites

"Il faut avoir de la suite dans les idées pour avoir des idées dans les suites"

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Si la suite (u_n) converge alors elle est bornée.	☐	☐
2	Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle converge.	☐	☐
3	Si la suite strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
4	Si la suite $(\cos u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(\sin u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
5	Si la suite réelle $(u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
6	Si la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
7	Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.	☐	☐
8	Une suite monotone converge.	☐	☐
9	Deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n - v_n \to 0$ convergent vers la même limite.	☐	☐
10	Le maximum de deux suites réelles convergentes définit une suite convergente.	☐	☐
11	Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
12	Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.	☐	☐
13	Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée alors $\lvert u_n \rvert$ tend vers $+\infty$.	☐	☐
14	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui tend vers 1 alors $(u_n)^n \to 1$.	☐	☐
15	Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles, $u_n \sim v_n \Longrightarrow \exp(u_n) \sim \exp v_n$.	☐	☐
16	Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles, $\exp(u_n) \sim \exp(v_n) \Longrightarrow u_n \sim v_n$.	☐	☐
17	Si deux suites réelles sont équivalentes alors elles sont de même signe APCR.	☐	☐
18	$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$	☐	☐
19	$\cos(\frac{1}{n}) \sim 1 - \frac{1}{n^2}$	☐	☐
20	$u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \Longleftrightarrow u_n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$	☐	☐
21	Si deux suites convergent vers la même limite alors elles sont équivalentes	☐	☐
22	Toute suite réelle admet une valeur d'adhérence.	☐	☐
23	Si une suite n'admet qu'une seule valeur d'adhérence alors elle converge.	☐	☐
24	Si une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge, sa limite est un point fixe de f	☐	☐

Exercices de prérentrée

Exercice 1  Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Exercice 2 *convergence en moyenne de Cesàro*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que si $u_n \to \ell$ alors $v_n \to \ell$.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose que u_n est une suite géométrique dont la raison est un complexe de module 1, étudier la convergence de v_n.

Exercice 3 *Centrale 2014* Soit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. On pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.
a) Montrer que u_n converge si et seulement si v_n converge.
b) Montrer que les deux suites divergent.
c) En déduire que $(\cos(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 4 *Limite d'une suite de rationnels vers un irrationnel*
Soit une suite de rationnels $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, mis sous forme irréductible avec $q_n > 0$.
On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ irrationnel. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$.

Exercice 5 Soient deux suites réelles définies par :
$u_0 = a, v_0 = b$ avec $0 \leqslant a < b$ et $u_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1})$, $v_n = \sqrt{u_n v_{n-1}}$.

1. Montrer que u_n et v_n convergent et ont même limite ℓ.
2. Trouver ℓ en posant $a = b\cos(\varphi)$.

Les basiques

Exercice 6 *Centrale 2016* a) Si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, que l'on note x_n.
b) Montrer que $x_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Exercice 7 *X 2008* Montrer qu'un réel est rationnel si et seulement si la suite de ses décimales est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 8 *X 2023* *Constante de Champernowne*[1]
Soit $C = 0,123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142\ldots$
(on écrit les écritures décimales de tous les entiers naturels à la suite). Montrer que C est irrationnel.

Exercice 9 On suppose que pour tout n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 14$ et $0 \leqslant v_n \leqslant 3$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 42$, montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 10  *Mines 2022*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \sqrt{n^2 + x_n}$.
a) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. b) Étudier l'erreur $x_n - n$.

---

1. David Gawen Champernowne (1912-2000) : statisticien anglais.

Les incontournables

Exercice 11 Soit une suite de rationnels $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, mis sous forme irréductible avec $q_n > 0$.
On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ irrationnel. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$.

Exercice 12 Soit $\lambda \in]-1,1[$, $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n = u_{n+1} - \lambda u_n$. Montrer que v_n converge implique u_n converge.

Exercice 13 *Mines 2022 et 2023* Prouver la convergence et calculer la limite de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Exercice 14 *Ens 2014*
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$.
On suppose que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée. Montrer que la suite (a_n/n) est convergente.

Exercice 15 Soit u_n une suite réelle à termes strictement positifs.
On suppose qu'il existe $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
a) Montrer que l'on a alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n}$. b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dbinom{2n}{n}^{1/n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$.

Exercice 16 *X 2017* Soit u_n et v_n deux suites complexes telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.
Etudier la suite $w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Exercice 17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, on définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $a_n = \inf\{u_p \ / \ p \geqslant n\}$ et $b_n = \sup\{u_p \ / \ p \geqslant n\}$.
a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.
b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

Exercice 18 *X 2008 et 2016*
a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.
b) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\cos(\sqrt{n})$.

Exercice 19 *Ens 2022* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n!$.
Donner un développement limité à trois termes de a_n.

Les autres

Exercice 20 *X 2023* Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n\{an!\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge où on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$.

Exercice 21 *Mines et Centrale 2022* Pour $n \geqslant 1$, on pose $P_n = -1 + \sum_{k=1}^{n} X^k$.
a) Montrer que P_n possède une unique racine u_n dans $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
c) Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 22 *Mines 2022* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \min\{x > 0,\ \cos(nx) = e^{-x}\}$.
a) Montrer que x_n existe.
b) Déterminer la limite de (x_n).
c) Déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 23 *Mines 2019 et 2023*
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note x_n.
b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.
c) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 24 *X 2020*
a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$. Montrer que l'équation $x - \arctan(x) = n^\alpha$ admet une unique solution positive, que l'on note x_n.
b) Donner un équivalent puis un développement asymptotique de x_n.

Exercice 25 *X 2016 et Mines 2023*
Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = n(x_n - n)$.
Montrer que $x_n = O(n)$ si et seulement si $x_1 = 2e$.

Exercice 26 *X 2011* Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Déterminer la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Exercice 27 *Mines 2022*
Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{p}} + \sqrt[n]{1+\dfrac{2}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\dfrac{p}{p}}\right)^n$.
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}.$$

Exercice 28 *Centrale 2011*
Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

Exercice 29 *Centrale 2009* Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}$ (n radicaux).
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $(a_p(n))_{p\geqslant 1}$ la suite définie par : $a_1(n) = \sqrt{n}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{p+1}(n) = \sqrt{n + a_p(n)}$.
a) Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer : $a_p(n) \leqslant \sqrt{pn}$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n$.
c) Déterminer un équivalent de u_n puis un équivalent de $u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 30 *Centrale 2010* Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}$.

Exercice 31 *X 2012* Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$. Déterminer la limite de (x_n). Donner un équivalent de x_n.

Exercice 32 Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{3n} - 3u_n = 1$. Etudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
